MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

PRINCIPIO BÁSICO:

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje de rotación, la velocidad angular de giro de todos los puntos respecto al centro de giro es la misma, pero la velocidad de desplazamiento (velocidad tangencial) de cada punto del cuerpo es función de la distancia del punto al centro de giro y de la velocidad de giro.

Esto significa que el esfuerzo necesario para cambiar el movimiento angular de cada diferencial del cuerpo depende de su posición relativa al centro de giro y es por lo tanto distinto al requerido para hacer el mismo cambio en otro diferencial equivalente del mismo material y volumen, pero colocado a una distancia distinta del centro de giro.

Posición angular del cuerpo

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega(t)dt$$

Donde:

$\Theta(t)$ es la posición angular del cuerpo en el instante t.

$\Theta(0)$ es la posición angular inicial del cuerpo en t=0.

$\omega(t)$ es la velocidad angular del cuerpo en el instante t.

VELOCIDAD ANGULAR DEL CUERPO.

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0) + \int_0^t \dot{\omega}(\tau)d\tau = \vec{\omega}(0) + \int_0^t \frac{d\vec{\omega}(\tau)}{d\tau}d\tau$$

Donde:

$\vec{\omega}$(t) es la velocidad angular del cuerpo en el instante t.
$\vec{\omega}$(0) es la velocidad angular inicial del cuerpo en t=0.
d$\vec{\omega}$(t)/dt es la aceleración angular del cuerpo en el instante t.

VELOCIDAD LINEAL TANGENCIAL DE DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DEL CUERPO A LA DISTANCIA R DEL CENTRO DE GIRO (VELOCIDAD DE DESPLAZAMIENTO LINEAL).

$$\vec{v}(t) = r\vec{\omega}(t)$$

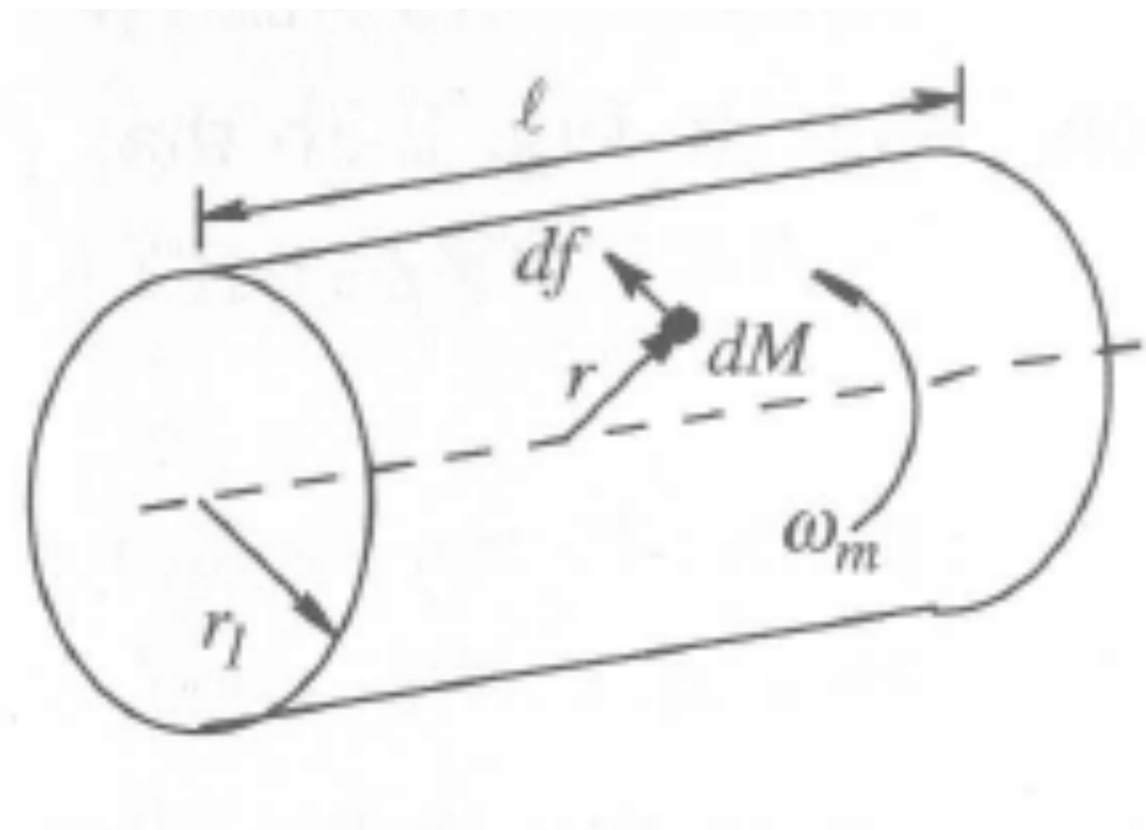
Donde:

$\vec{v}$(t) es la velocidad lineal tangencial de desplazamiento del punto a la distancia r.

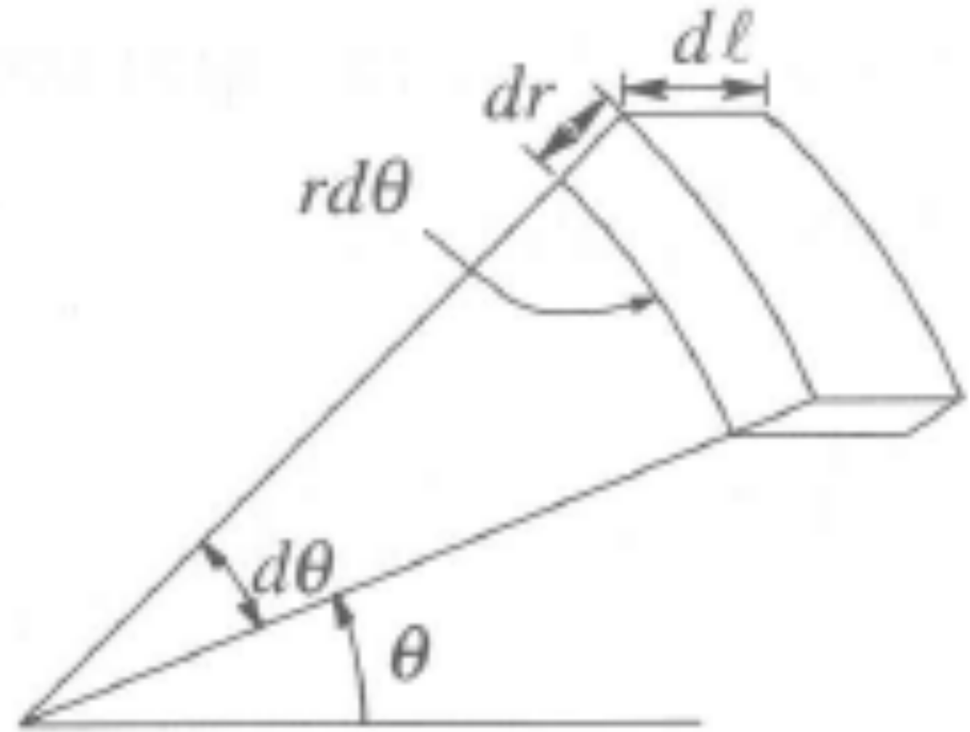
r es la distancia al centro de giro.

$\vec{\omega}$(t) es la velocidad angular de giro alrededor del centro.

MOMENTO DE INERCIA DE UN CILINDRO SÓLIDO HOMOGÉNEO



El punto negro representa un diferencial del cilindro cuyo movimiento se pretende estudiar.



Diferencial de masa en el cilindro homogéneo.

De acuerdo con la ecuaciones básicas, el diferencial de fuerza, df(t), que se debe aplicar a un diferencial de masa, dM, para lograr un diferencial de cambio de velocidad, $d\vec{v}/dt$ es:

$$d\vec{f}(t) = (dM)(\frac{d\vec{v}}{dt})$$

$$d\vec{f}(t) = (dM)(\frac{d\vec{v}}{dt}) = (dM)r\frac{d\vec{\omega}}{dt} = r(dM)\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Y, manipulando:

$$rd\vec{f}(t) = r^2(dM)\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Si se define un “diferencial de par”, d$\vec{T}$, referido al eje de giro, como:

$$d\vec{T}(t) = r d\vec{f}(t)$$

$$d\vec{T}(t) = r^2 (dM) \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Si además se considera que:

ρ es la densidad constante del cuerpo homogéneo.
r$d\theta$ (radio por diferencial de ángulo) es el diferencial de distancia recorrida, o diferencial de arco.
dr es diferencial de espesor del casquete cilíndrico
dl es diferencial de alto del casquete cilíndrico (paralelo al eje del cilindro)

El diferencial de volumen es: $rd\theta drdl$

Y el diferencial de masa resulta:

$$dM = \rho rd\theta drdl$$

Por lo tanto:

$$d\vec{T}(t) = r^2(\rho rd\theta drdl)\frac{d\vec{\omega}}{dt} = r^3 \rho d\theta drdl \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{T}(t) = \rho \int_0^{r_t} r^3 dr \int_o^{2\pi} d\theta \int_0^{l_t} dl \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{T}(t) = (\frac{\pi}{2}\rho l r^4)\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Si se define el “momento de inercia del cuerpo”, J, como:

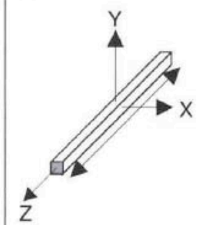
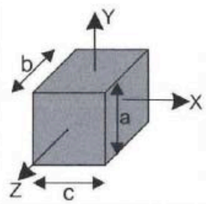
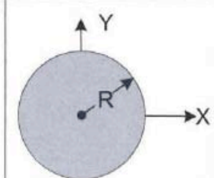
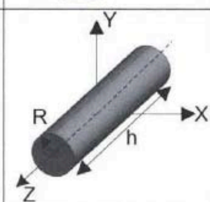
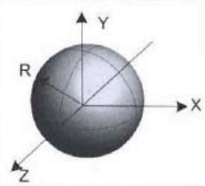
$$J = (\frac{\pi}{2}\rho l r^4) = \frac{1}{2}(\pi r^2 l \rho) r^2 = \frac{1}{2} M r^2$$

Entonces el par aplicado resulta:

$$\vec{T}(t) = J \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

Esta ecuación es la dual de la ecuación de Newton para el movimiento lineal:

$$\vec{f}_M(t) = M\vec{a}(t) = M \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Barra		$\frac{ml^2}{12}$	$\frac{ml^2}{12}$	$\frac{ml^2}{12}$
Cuboide		$\frac{m}{12}(a^2+c^2)$	$\frac{m}{12}(a^2+c^2)$	$\frac{m}{12}(b^2+c^2)$
Disco		$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{2}$
Cilindro		$\frac{m}{12}(3R^2+h^2)$	$\frac{m}{12}(3R^2+h^2)$	$\frac{mR^2}{2}$
Esfera		$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$

Momentos de inercia de algunos cuerpos homogéneos

Si se conoce el momento de inercia, J_r, de un cuerpo homogéneo de masa M cuando gira respecto a un eje de referencia, su momento de inercia, J, con respecto a un eje paralelo al de referencia, colocado a una distancia d del eje de referencia se puede calcular, aplicando el teorema de los ejes paralelos, como:

$$J = J_r + Md^2$$

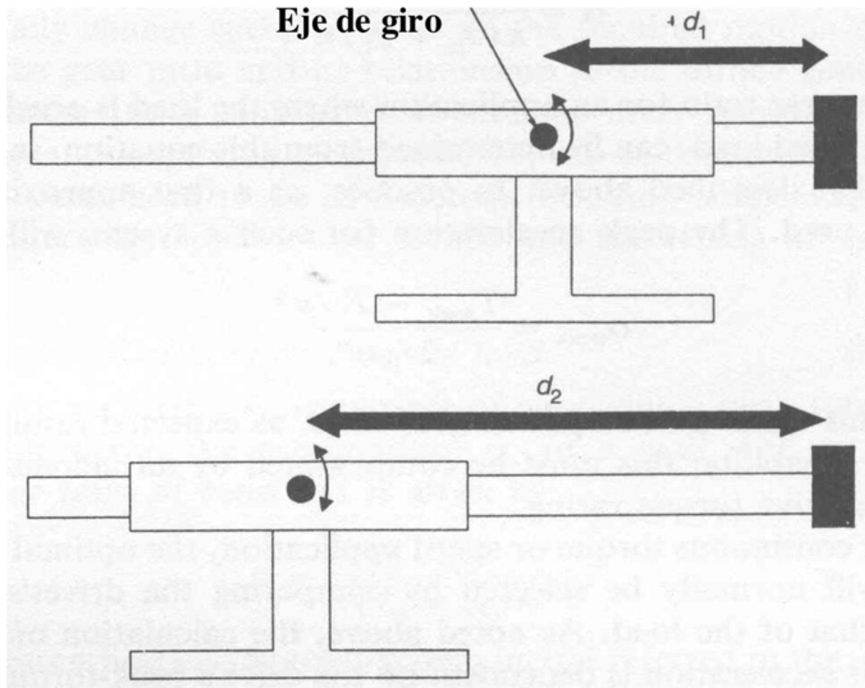
Consideraciones adicionales:

1.- El momento de inercia no solo depende del valor de la masa en movimiento, también depende de la distribución de dicha masa en relación con el centro de giro del sistema.

Determinar el momento de inercia de un cuerpo asimétrico o de uno simétrico pero con una distribución de masa arbitraria es un problema no trivial, que puede requerir el empleo de un programa de cálculo por elementos finitos.

2.- Un cambio en la distribución de la masa en un cuerpo cambia el momento de inercia del mismo, aunque la masa total del cuerpo no cambie.

Esto debe tomarse en cuenta en los sistemas complejos, donde puede ser necesario resolver el problema en forma recurrente para los distintos momentos de inercia resultantes de todas las configuraciones posibles.

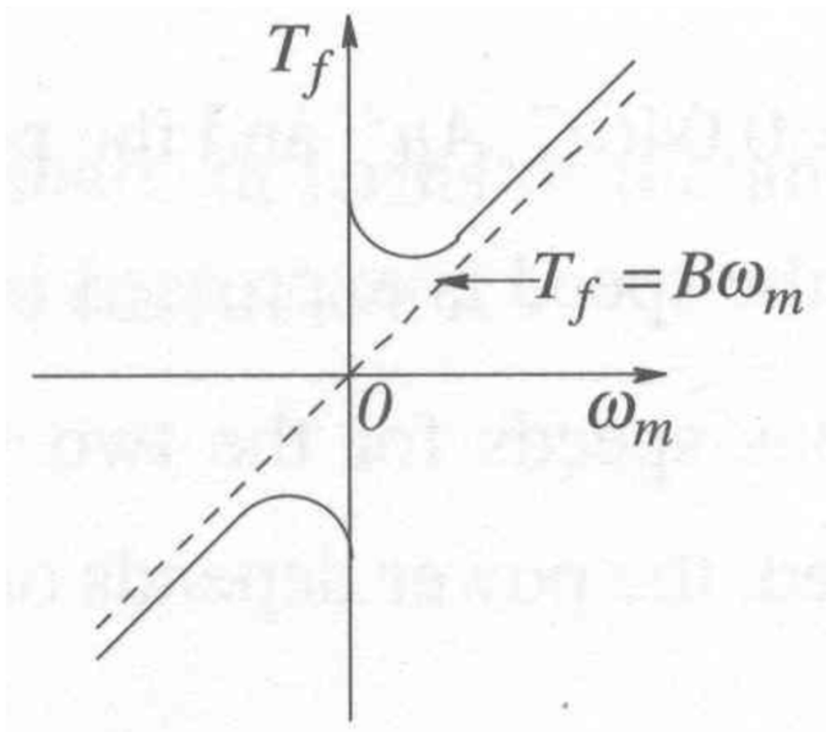


Efecto del desplazamiento de las piezas sobre la inercia del sistema

Como en el caso del movimiento lineal, el par neto de aceleración, $\vec{T}_n$, es la suma de todos los pares de empuje, $\vec{T}_e$, que se aplican en la dirección de giro deseada, menos la suma de todos los pares de oposición, $\vec{T}_o$, que se aplican en la dirección contraria al giro deseado.

$$\vec{T}_n = \sum_{i=1}^{k} \vec{T}_{ei} - \sum_{j=1}^{m} \vec{T}_{oj}$$

Cuando un cuerpo gira sobre un eje apoyado, en general siempre existe un par de fricción, $\vec{T}_f$, que se opone al movimiento.



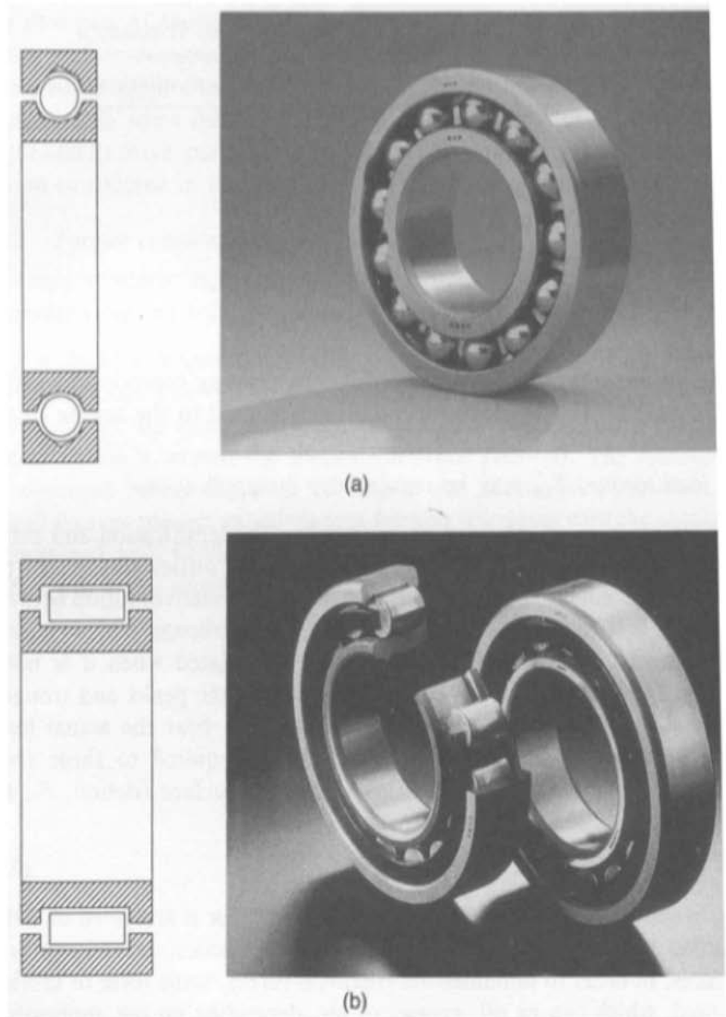
Fricción. Curva medida y aproximación lineal

De forma que el sistema más simple, con un solo par de empuje, $\vec{T}_e$, resulta:

$$\vec{T}_n(t) = \vec{T}_e(t) - \vec{T}_f(t) = \vec{T}_e(t) - B\vec{\omega}(t) = J\,\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

donde B es el coeficiente de fricción viscosa.

El componente de fricción debe ser minimizado, lo que en el caso del movimiento de giro usualmente requiere que los ejes que rotan estén sostenidos por medio de "cojinetes" o "rodamientos", estructuras formadas por dos anillos, que pueden rotar uno con respecto al otro mediante un conjunto de esferas o rodillos de apoyo.

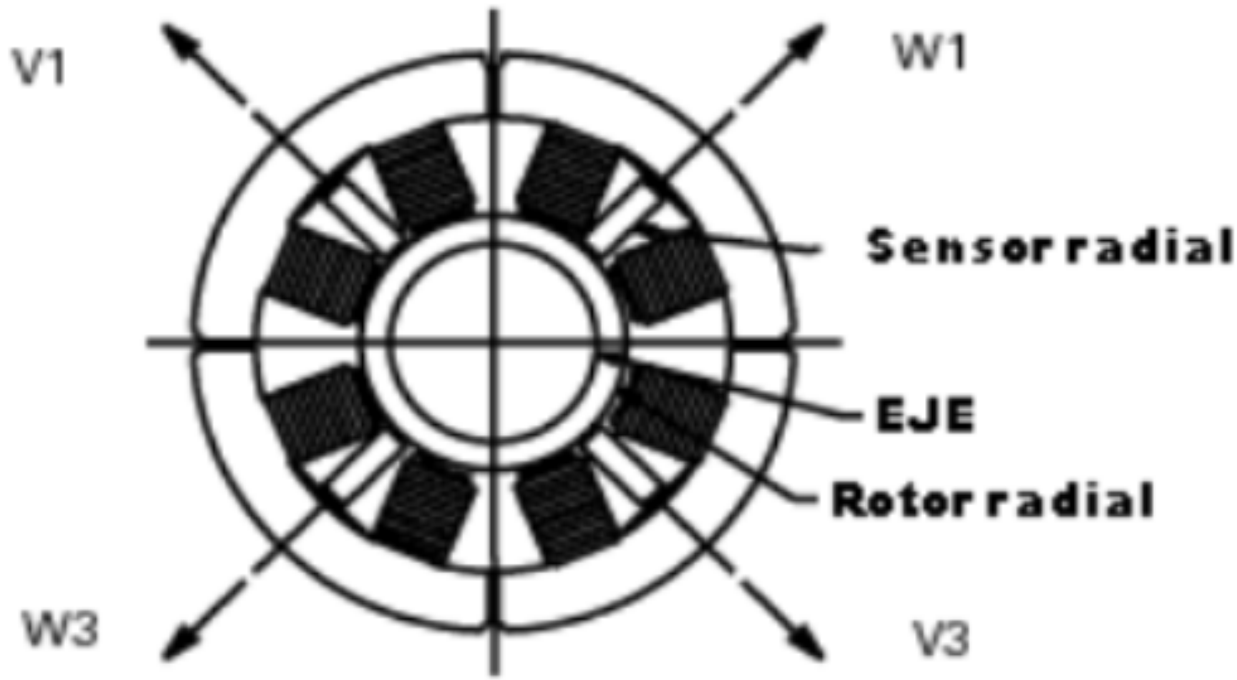


Cojinetes. a: De bolas. b: De rodillos

Los cojinetes convencionales reducen pero no eliminan la fricción, y están sometidos a desgaste que produce fallas.

El coeficiente de fricción viscosa de un cojinete en buen estado varía entre 0,001 y 0,004, dependiendo del tipo.

Si se desea eliminar la fricción, cosa imprescindible a muy altas velocidades de giro, es preciso recurrir cojinetes especiales, donde se reduce al mínimo el contacto entre las partes móviles y el cuerpo estático de apoyo, mediante "cojinetes de fluido", que hacen flotar el eje en una camisa de fluido a presión, o "cojinetes magnéticos" que levitan el eje de material ferromagnético mediante el campo magnético generado por un arreglo de electroimanes.

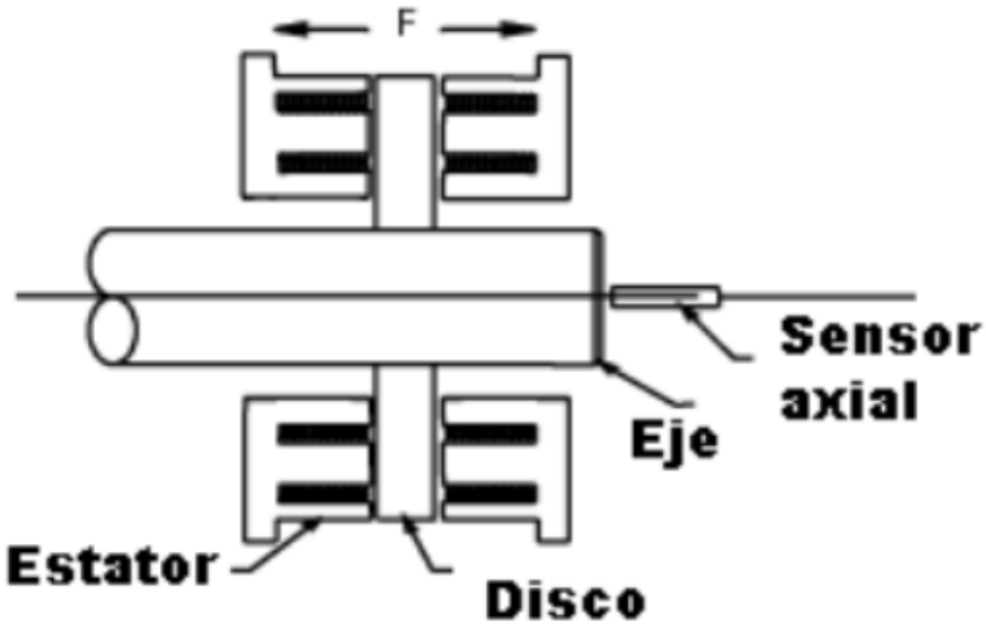


Esquema de un cojinete magnético radial.

El campo magnético es producido por un arreglo de 8 bobinas conectadas en cuatro pares, de forma que el eje de material magnético queda suspendido en el centro del arreglo sin contacto directo con el anillo de soporte mecánico. Los sensores de posición radial cierran el lazo de realimentación para posicionar el eje flotante.

El entre-hierro en los cojinetes magnéticos varia entre 0,5 y 2mm; como solo existe la fricción con el aire, las velocidades de giro pueden superar las 200.000r.p.m.

Un cojinete magnético radial no limita el movimiento de traslación del eje, que debe ser bloqueado mediante un cojinete magnético de empuje axial.



Esquema de un cojinete magnético axial.

El campo magnético de las bobinas de estator mantiene centrado el disco, impidiendo que el eje se desplace longitudinalmente.

4.-Resistencia aerodinámica.

Cuando el cuerpo gira en un fluido (por ejemplo el aire), se produce un par de oposición al movimiento debido al trabajo realizado al desplazar el fluido, $\vec{T}_{df}$. En primera aproximación, a velocidades "bajas":

$$\vec{T}_{df}(t) = k\vec{\omega}^2(t)$$

Donde k es una constante que depende de la forma del cuerpo y de las características del fluido.

En estas condiciones, considerando la fricción y el desplazamiento del fluido:

$$\vec{T}_n(t) = \vec{T}_e(t) - \vec{T}_f(t) - \vec{T}_{df}(t) = \vec{T}_e(t) - B\vec{\omega}(t) - k\vec{\omega}^2(t) = J\,\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

6.–En el caso genérico, el par de empuje, además de hacer girar al cuerpo con el momento de inercia J, realiza un trabajo adicional, venciendo a un par de oposición, $\vec{T}_L$, por lo que el par de empuje necesario resultante es:

$$\vec{T}_n(t) = \vec{T}_e(t) - \vec{T}_f(t) - \vec{T}_{df}(t) - \vec{T}_L(t) = J\,\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

$$\vec{T}_n(t) = \vec{T}_e(t) - B\vec{\omega}(t) - k\vec{\omega}^2(t) - \vec{T}_L(t) = J\,\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

El par de empuje necesario para realizar el cambio de velocidad angular deseado es entonces:

$$\vec{T}_e(t) = B\vec{\omega}(t) + k\vec{\omega}^2(t) + \vec{T}_L(t) + J\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

Cuando se llega a la situación:

$$\vec{T}_e(t) = B\vec{\omega}(t) + k\vec{\omega}^2(t) + \vec{T}_L(t)$$

Entonces el par de aceleración resulta:

$$J\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = 0$$

Y el sistema permanece girando a velocidad constante en la dirección original. Esta velocidad de giro es la velocidad límite del sistema.

Por otra parte, considerando el par efectivo disponible para cambiar la velocidad, $\vec{T}_d$:

$$\vec{T}_d(t) = \vec{T}_e(t) - \left(B\vec{\omega}(t) + k\vec{\omega}^2(t) + \vec{T}_L(t)\right)$$

se cumple:

$$\frac{\vec{T}_d(t)}{J} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

Esto es, para un par de magnitud fija, la aceleración obtenida es inversamente proporcional al momento de inercia del sistema.

Influencia de la aceleración de gravedad.

Si la distribución de la masa en el cuerpo que gira es totalmente simétrica respecto al eje de giro, la gravedad no ejerce efecto sobre el proceso de giro ya que el centro de masa, punto de aplicación del peso, coincide con el centro de giro y permanece por lo tanto inmóvil respecto al mismo.

Si la distribución de la masa en cuerpo que gira no es totalmente simétrica respecto al eje de giro, el centro de masa no coincide con el centro de giro, lo que hace que aparezca un par variable adicional ($T_p(\theta)$) debido al producto del peso por el correspondiente brazo de palanca que es función de la posición angular.

El par adicional producido por la “masa asimétrica” en el cuerpo que rota, $T_p(\theta)$, es:

$$T_p(\Theta) = M_a \vec{g} r(\Theta)$$

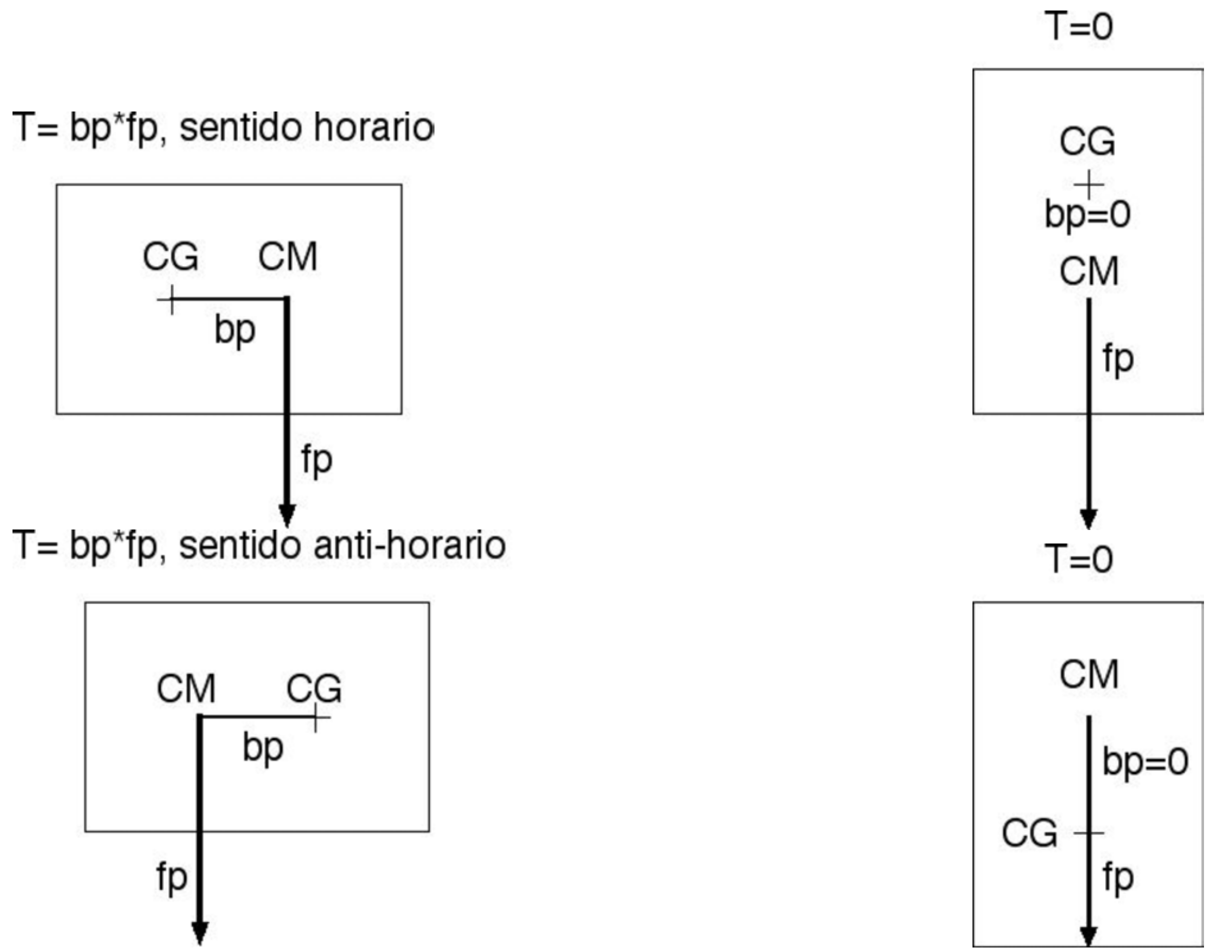
donde:

M_a es la masa distribuida no simétricamente.

$r(\Theta)$ es la distancia que separa el centro de masa asimétrica del centro de giro, que es una función de la posición angular del centro de masa asimétrica respecto al centro de giro.

g es la aceleración de gravedad.

Esto es un problema que requiere un análisis cuidadoso, ya que ese par será oscilante tanto en magnitud como en signo a lo largo de cada revolución del cuerpo



Oscilaciones de par debido al peso en giro desbalanceado.

Por ejemplo, si consideramos el caso simple de un cuerpo de masa M que gira sobre un eje horizontal y cuyo centro de masas está separado una distancia r respecto al centro de giro, tal como muestra la figura, el par oscilante, $T_{os}(\Theta)$, debido al giro del cuerpo, en función del ángulo de rotación, Θ, será:

$$T_{os}(\Theta) = M\vec{g}rsen\Theta$$

donde por comodidad Θ es el ángulo de giro medido desde la posición en la que el centro de masa está exactamente debajo del centro de giro, punto en el cual $T_{os}(0) = 0$.

En estas condiciones, el par de empuje necesario para lograr el giro es:

$$T_e(t) = B\omega(t) + k\omega^2(t) + T_L(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} + M\vec{g}rsen\Theta$$

Y para resolverlo la ecuación debe ser reescrita en base al ángulo de la forma:

$$T_e(t) = B\frac{d\Theta(t)}{dt} + k\left(\frac{d\Theta(t)}{dt}\right)^2 + T_L(t) + J\frac{d^2\Theta(t)}{dt} + M\vec{g}rsen\Theta$$

Consideraciones finales:

1. Movimiento combinado giro-translación.

Los cálculos anteriores asumen que el sistema que gira no se está además desplazando linealmente, esto es, que las coordenadas x, y, z del centro de giro son constantes.

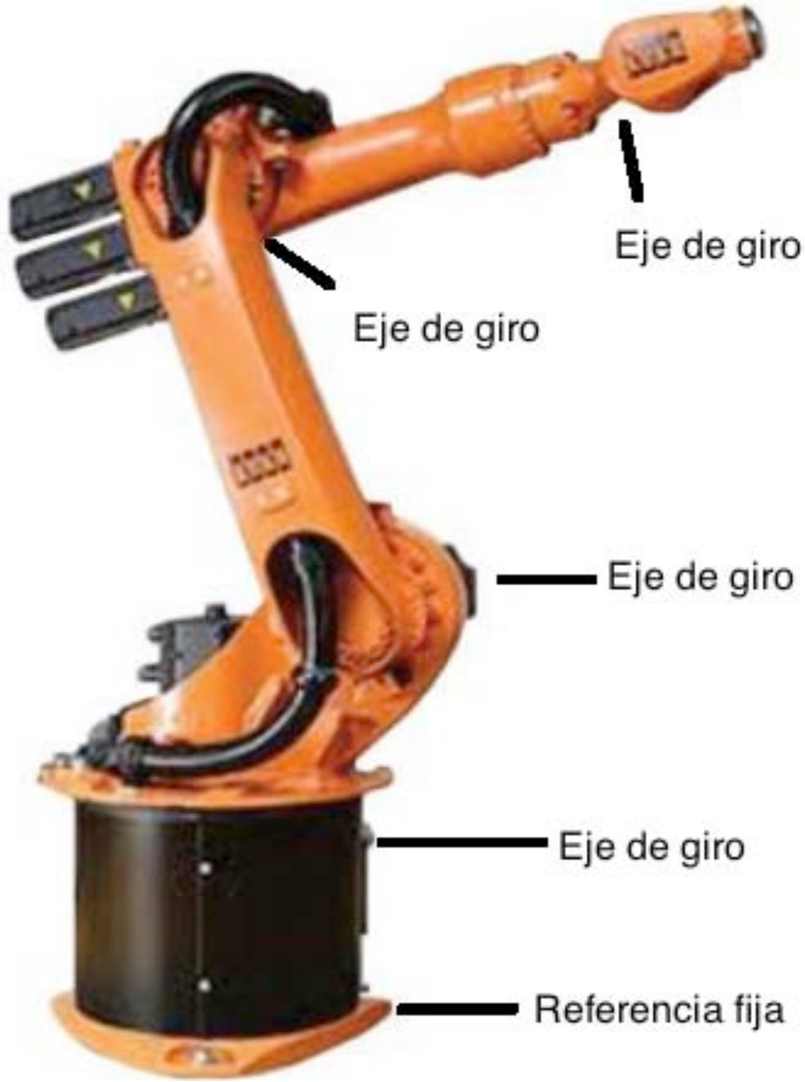
Si esto no es así, debe calcularse el efecto combinado del desplazamiento del sistema giratorio alrededor del eje de giro y el desplazamiento lineal del sistema.

En primera aproximación el problema se puede resolver por superposición, considerando el giro respecto a un centro fijo y luego el desplazamiento con toda la masa giratoria concentrada en el centro de giro.

2.-Movimientos de giro combinados.

Las consideraciones anteriores se refieren exclusivamente al caso en donde el movimiento de giro esté referido a un eje que no esté girando con respecto a otra referencia.

En muchas máquinas esta situación simple no aplica, ya que el mecanismo tiene diversas partes móviles que actual mas o menos simultáneamente. Esta situación es sumamente común por ejemplo en aplicaciones robóticas donde la "muñeca", el "codo", el “hombro” y la "cintura" pueden estar moviéndose al mismo tiempo, por lo que la velocidad angular de la herramienta con respecto a la base fija resulta de la suma de hasta cuatro velocidades.

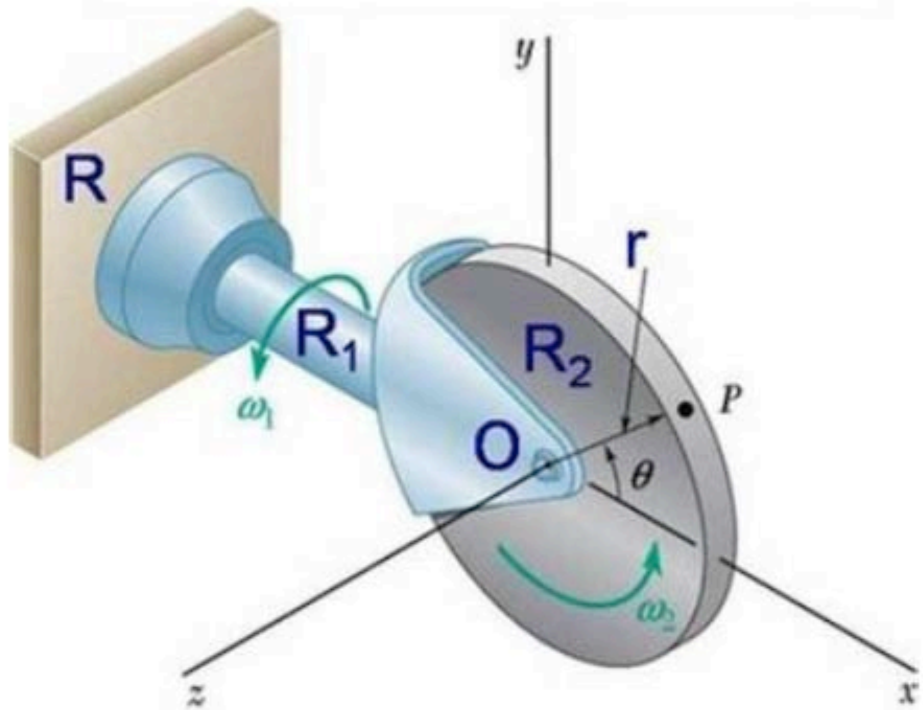


Brazo robot con cuatro ejes de giro entre el actuador y la base fija

$$ {}^{R}\vec{\omega}^{R_2} = {}^{R}\vec{\omega}^{R_1} + {}^{R_1}\vec{\omega}^{R_2} $$

Velocidad angular simple

Velocidad angular compuesta



Ejemplo de giro combinado de dos movimientos de rotación.

En la figura el punto de referencia fijo es R, y el eje R_1 tiene un movimiento de giro simple, con una velocidad angular ω_1 con respecto a esta referencia.

R_1 sirve de referencia al giro de la rueda R_2, que tiene con respecto a su referencia una velocidad angular ω_2

La velocidad angular de la rueda respecto a la referencia fija R se puede calcular en base al teorema de la suma de velocidades angulares, que indica que en un sistema con n ejes de giro, la velocidad angular del n-simo giro con respecto a la referencia estacionaria es:

$$\omega_{R_N} \rightarrow R = \omega_{R_1} \rightarrow R + \omega_{R_2} \rightarrow R_1 + .. + \omega_{R_N} \rightarrow R_N$$

POTENCIA Y ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ROTACIONAL

$$P = \vec{T}\frac{d\theta}{dt} = \vec{T}\vec{\omega} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt}\omega$$

$P_M(t)$ es la potencia neta invertida por el mecanismo que ejerce el par $\vec{T}$ para hacer rotar el cuerpo con el momento de inercia J en la dirección angular Θ con la velocidad $\vec{\omega}$ (t) en el instante t.

$$E = \int_0^t P(\tau)d\tau = \int_0^t J\vec{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{d\tau}d\tau = J\int_0^\omega \vec{\omega}d\vec{\omega} = \frac{1}{2}J\vec{\omega}^2$$

E(t) es la energía cinética almacenada en el movimiento rotación del cuerpo de momento de inercia J con la velocidad de rotación $\vec{\omega}$ (t) en el instante t.

Todo cambio de velocidad angular está acompañado por un cambio ΔE en la energía cinética rotacional del cuerpo, dado por:

$$\Delta E = \frac{J\left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right)}{2}$$

Donde ω_i es la velocidad inicial antes del cambio y ω_f es la velocidad final después del cambio.

Si $\omega_f > \omega_i$ la variación en la energía cinética es positiva, y la energía adicional debe ser proporcionada por una fuente externa (un motor).

Si $\omega_f < \omega_i$ la variación en la energía cinética es negativa, y la energía en exceso tiene que ser absorbida por un receptor externo (un freno).

La energía cinética rotacional en el movimiento de rotación es el equivalente a la energía cinética de desplazamiento en el movimiento lineal.

En el movimiento rotacional no existe un equivalente directo a la energía potencial del movimiento lineal.

Energía asociada al movimiento y la altura de un cuerpo.

Cuando un cuerpo gira sobre un eje y además se desplaza linealmente en el espacio, el sistema puede acumular o perder tanto energía cinética rotacional (por el giro), como energía cinética por el desplazamiento lineal, y además puede acumular o perder energía potencial si en su traslación cambia su altura con respecto al plano de referencia.

Por ejemplo la energía mecánica total de un vehículo de ruedas es la suma de su energía cinética de desplazamiento, calculada tomando en cuenta la velocidad lineal de desplazamiento y su masa total, la energía cinética rotacional de sus partes giratorias (ruedas, ejes, etc.) tomado en cuenta sus momentos de inercia y sus velocidades de giro, y la energía potencial, calculada en base a la masa total y a su altura sobre el plano de referencia.

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN: UNIDADES.

Variable	MKS
Par	Newton*metro (Nm)
Momento de inercia	kgm^2
Tiempo	Segundo (s)
Posición (relativa al origen)	radian
Velocidad	radian por segundo (radian/s)
Aceleración	radian por segundo por segundo ($radian/s^2$)
Potencia	Vatio (w)
Energía	Joule (j)