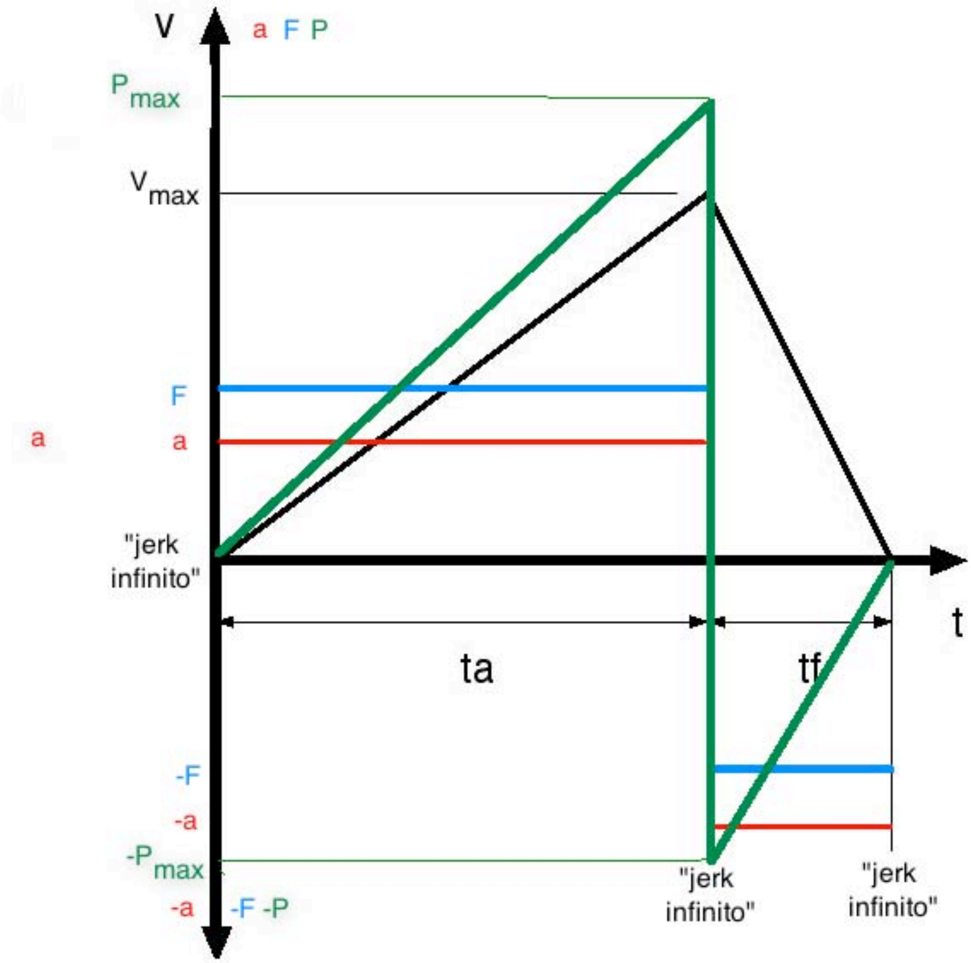
RESPUESTA ÓPTIMA EN POSICIÓN Y VELOCIDAD.

El móvil puede ser un vehículo de ruedas o, mas en general, cualquier pieza de una maquinaria que debe desplazarse de un punto a otro, con movimiento lineal o de rotación, empleando el menor tiempo posible, pero respetando límites prefijados de velocidad, aceleración potencia y “jerk”, buscando obtener una “respuesta óptima”.

Cuando un cuerpo debe desplazarse desde la posición A hasta la posición B, recorriendo una distancia X, se suele considerar que el movimiento será “óptimo” cuando se realice empleando el menor tiempo posible y el error de posicionamiento final sea cero.

Partiendo de la condición de velocidad inicial (cero, si el cuerpo está en reposo), y asumiendo que no hay límite a la velocidad que se puede alcanzar (ni mecánico, impuesto por el sistema, ni por especificaciones), ni a la potencia disponible, el movimiento "óptimo" ocurrirá en dos etapas: una de aceleración seguida inmediatamente por una de frenado.

Si solo se considera la masa del cuerpo, la aceleración será constante aplicando una fuerza constante, y la potencia instantánea crecerá linealmente con la velocidad.



Perfil velocidad-tiempo triangular.

Para mantener aceleración constante en presencia de componentes de fricción o de otras fuerzas de oposición al movimiento, es preciso que la fuerza total aplicada, F_t, cambie continuamente, de forma que la fuerza neta disponible para acelerar el cuerpo sea constante:

$$F_n = F_t(t) - F_f\left(v, v^2\right) - F_L(t) = K = aM$$

Si solo se considera los componentes de fricción la fuerza aplicada deberá crecer continuamente, por lo que el crecimiento de la demanda de potencia será mas que lineal.

La distancia recorrida mientras se acelera, X_a, será:

$$X_a = \frac{\vec{a}_a t_a^2}{2}$$

donde t_a es el tiempo de aceleración y a_a es la aceleración aplicada.

La distancia recorrida mientras se frena, X_f, será:

$$X_f = \frac{\vec{a}_f t_f^2}{2}$$

donde t_f es el tiempo de frenado y a_f es la desaceleración (aceleración negativa de frenado).

Por supuesto, para cumplir las condiciones del recorrido:

$$X = X_a + X_f \Rightarrow X = \frac{\vec{a}_a {t_a}^2}{2} + \frac{\vec{a}_f {t_f}^2}{2} \quad (1)$$

El tiempo total empleado en el movimiento, t_t, resulta:

$$t_t = t_a + t_f$$

Por continuidad la velocidad al final de la etapa de aceleración, $\vec{v}_{fa}$, es la velocidad inicial al comienzo de la etapa de frenado, $\vec{v}_{ff}$.

Por lo tanto:

$$\vec{v}_{fa} = \vec{a}_a t_a$$

$$\vec{v}_{fa} - \vec{a}_f t_f = 0 \Rightarrow \vec{v}_{fa} = \vec{a}_f t_f$$

$$\vec{a}_a t_a = \vec{a}_f t_f \Rightarrow \frac{\vec{a}_a}{\vec{a}_f} = \frac{t_f}{t_a} \quad (2)$$

Conocido X y las dos aceleraciones el problema se resuelve en base a las ecuaciones 1 y 2.

De (2), si la aceleración y la desaceleración son iguales $\left(\vec{a}_a = \vec{a}_f = \vec{a}\right)$, los tiempos de aceleración y frenado serán iguales $(t_a = t_f = t)$, lo que implica que la transición entre la etapa de aceleración y la de frenado ocurrirá en el punto medio de la trayectoria:

$$X_a = X_f = \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{X}{2} = \frac{\vec{a}t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{X}{\vec{a}}} \Rightarrow t_t = 2\sqrt{\frac{X}{\vec{a}}}$$

Y la velocidad máxima alcanzada, v_{fm}, será:

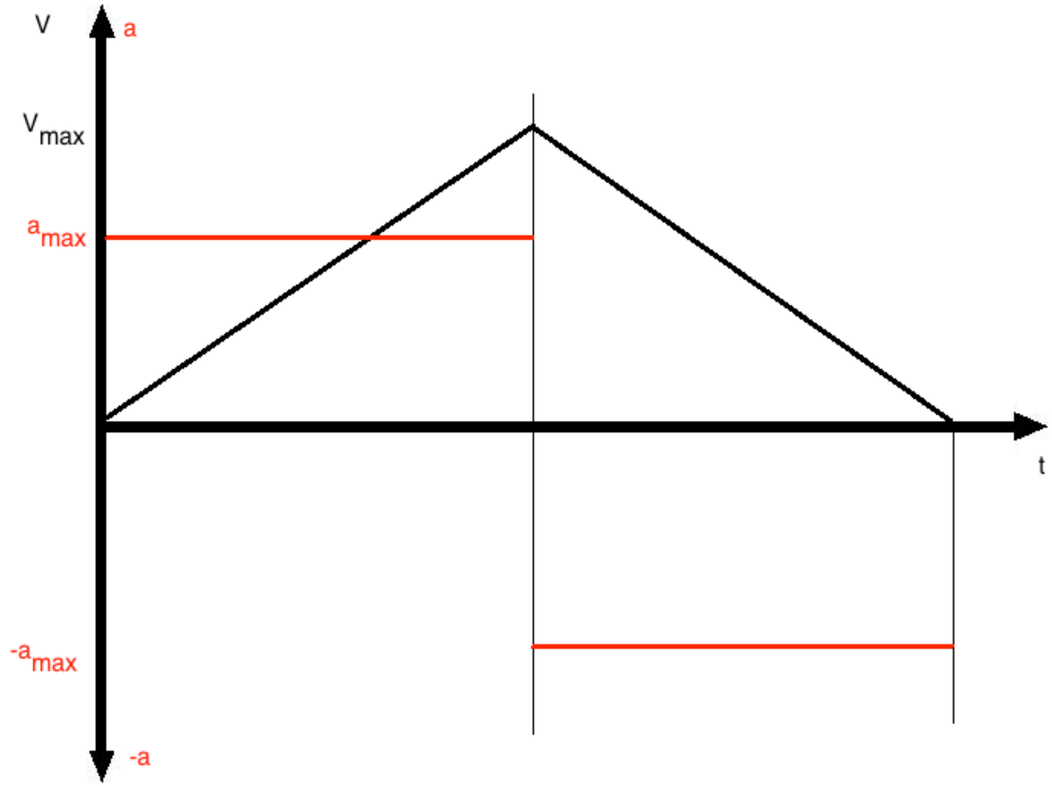
$$\vec{v}_{fm} = \sqrt{\vec{a}X}$$

El tiempo total será mínimo cuando la aceleración sea la máxima posible. En ese caso la velocidad final alcanzada será también máxima.

Cuando la aceleración y la desaceleración son iguales, sin importar su magnitud, el punto de inicio de frenado, X_{if}, es siempre el mismo:

$$X_{if} = \frac{X}{2}$$

Esta es una información importante a tener en cuenta cuando se diseñan máquinas en las cuales se puede asegurar igualdad en las aceleraciones, ya que ofrece una referencia segura para iniciar el proceso de frenado.



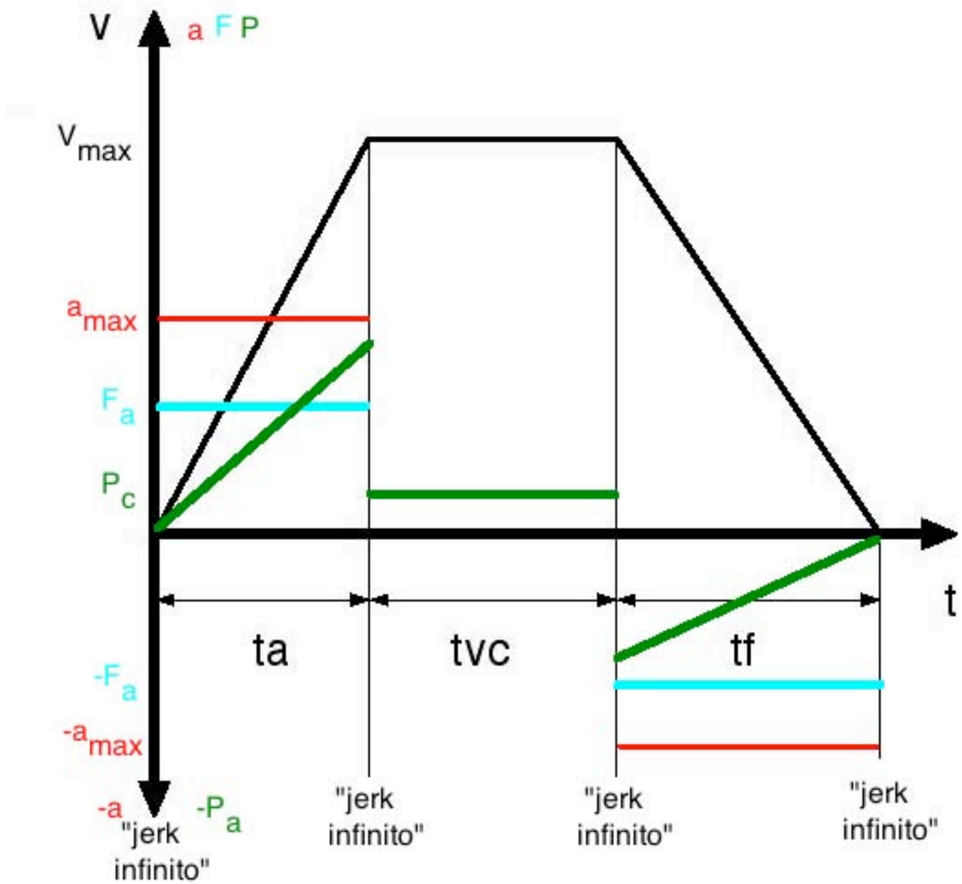
Perfil de desplazamiento v-t triangular, con aceleración y desaceleración de la misma magnitud.

Si por cualquier motivo el sistema no debe superar una velocidad límite dada, $\vec{v}_l$, y se cumple $\vec{v}_l < \vec{v}_{fm}$, entonces el desplazamiento óptimo ocurrirá en tres etapas:

1.- Etapa de aceleración máxima hasta alcanzar $\vec{v}_l$

2.- Etapa de movimiento a $\vec{v}_l$ constante.

3.- Etapa de desaceleración máxima hasta detenerse.



Perfil de desplazamiento velocidad-tiempo trapezoidal (t_a=t_f).

1.- Etapa de aceleración.

$$t_a = \frac{\vec{v}_l}{\vec{a}_a}$$

$$X_a = \frac{\vec{a}_a t_a^2}{2} = \frac{\vec{a}_a\left(\frac{\vec{v}_l}{\vec{a}_a}\right)^2}{2} = \frac{\vec{v}_l^{\,2}}{2\vec{a}_a}$$

2.- Etapa de frenado.

$$t_f = \frac{\vec{v}_l}{\vec{a}_f}$$

$$X_f = \frac{\vec{a}_f t_f^2}{2} = \frac{\vec{a}_f \left(\frac{\vec{v}_l}{\vec{a}_f}\right)^2}{2} = \frac{\vec{v}_l{}^2}{2\vec{a}_f}$$

3.- Etapa de velocidad constante.

La distancia a recorrer a velocidad constante, X_c, es:

$$X_c = X - X_a - X_f$$

El tiempo necesario (t_c) para recorrer esa distancia a la velocidad límite constante ($\vec{v}_l$) es:

$$t_c = \frac{X - X_a - X_f}{\vec{v}_l}$$

El tiempo total (t_t) necesario para realizar el recorrido cuando existe la velocidad límite $\vec{v}_l$ es:

$$t = t_a + t_c + t_f = \frac{\vec{v}_l}{\vec{a}_a} + \frac{X - X_a - X_f}{\vec{v}_l} + \frac{\vec{v}_l}{\vec{a}_f}$$

La posición en la cual se debe iniciar el frenado, X_{if}, es:

$$X_{if} = X - X_f = X - \frac{\vec{v}_l^{\,2}}{2\vec{a}_f}$$

Nótese que en este caso la posición de inicio de frenado no es constante, ya que es función de la magnitud de la aceleración.

Si las aceleraciones son iguales se cumple:

$$a_a = a_f = a$$

$$t_a = t_f$$

$$X_f = X_a$$

El problema de la derivada de la aceleración ("jerk")

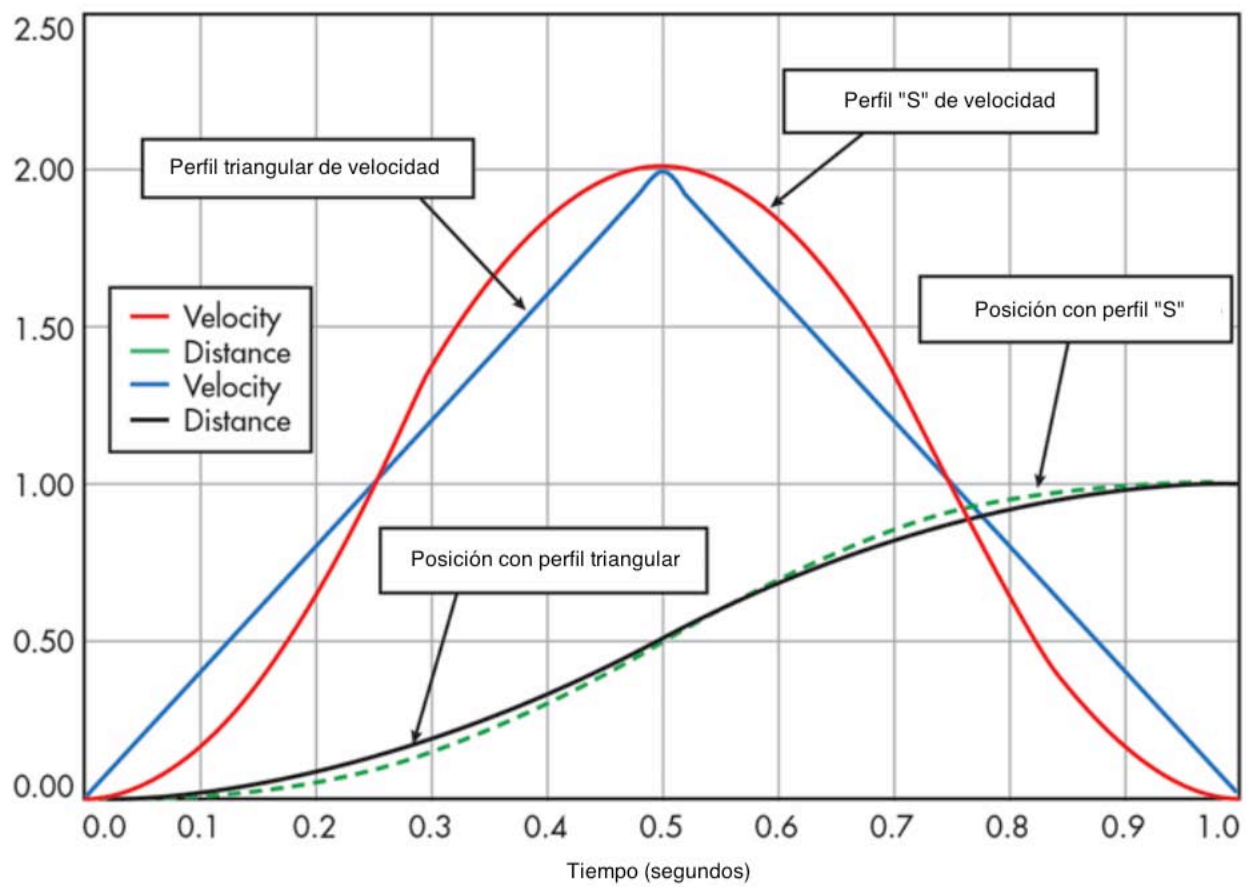
En los perfiles triangulares y trapezoidales ideales se producen cambios en escalón de la aceleración y la desaceleración, los que matemáticamente requieren que

$$\frac{da(t)}{dt} \Rightarrow \infty$$

En la práctica un "jerk" infinito por supuesto no existe, pero se pueden producir valores muy altos que no sean aceptables en una aplicación determinada (por ejemplo en el transporte de pasajeros).

Si es preciso limitar el jerk a un valor máximo controlado, los perfiles simples antes descritos no son aplicables, y deben ser reemplazados por perfiles mas complejos, del tipo de los "perfiles S", en los cuales la variable cuyo valor se mantiene constante es el "jerk", lo que produce una aceleración que crece o decrece linealmente.

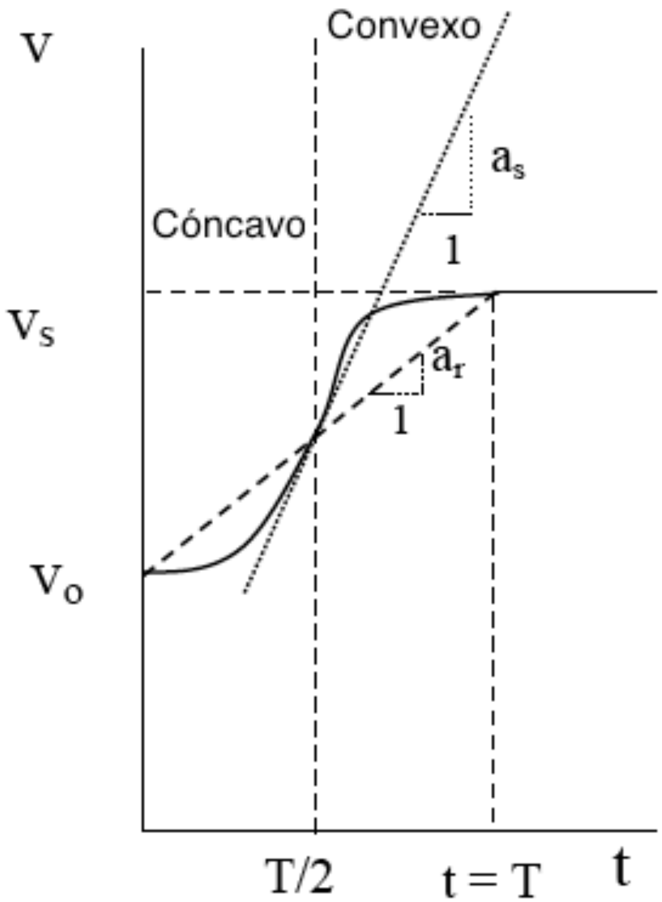
El perfil S se puede ajustar para que la velocidad máxima sea igual a la alcanzado con un perfil triangular o trapezoidal equivalente, esto es, uno que requiere el mismo tiempo para cubrir el mismo espacio.

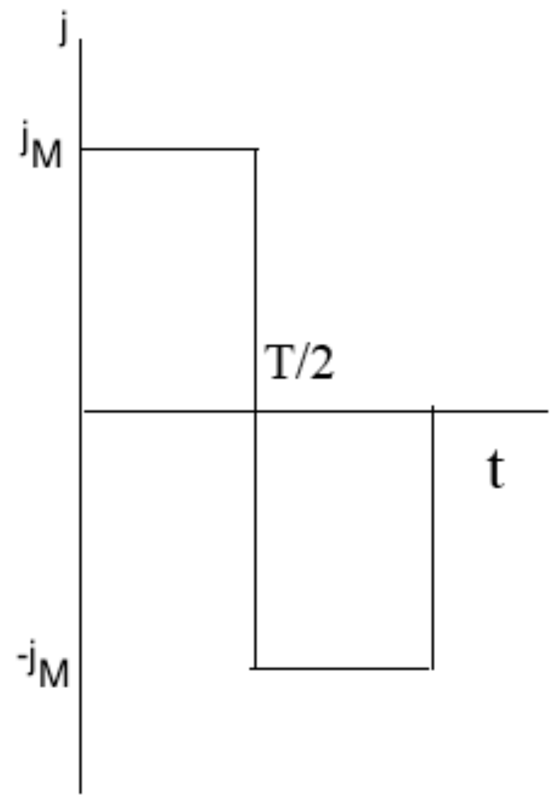


Perfiles S y triangular equilátero equivalentes.

Una vez definido el perfil triangular (o trapezoidal) óptimo sin tomar en cuenta el límite en el "jerk", el perfil S equivalente se puede calcular a partir del perfil óptimo ya calculado.

Generación del perfil S, primera etapa (aceleración):





Perfil de velocidad

Variación del "jerk"

Principios del diseño:

La suma de las áreas de las zonas cóncava y convexa es igual al área total bajo la recta de velocidad linealmente creciente.

El punto de cruce de la zona cóncava a la convexa ocurre a la mitad del intervalo de aceleración, y en ese instante las dos velocidades son iguales.

En el momento del cruce la aceleración en el perfil S, a_s, es mayor que la aceleración constante en el otro perfil, a_r. Esto implica que los requerimientos de fuerza en el perfil S son mayores.

Zona cóncava.

El perfil de velocidad viene dado por:

$$v(t) = c_o + c_1 t + c_2 t^2$$

De allí las ecuaciones de la aceleración, a(t), y el jerk, j(t) son:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = c_1 + 2c_2 t$$

$$j(t) = \frac{da(t)}{dt} = 2c_2$$

En la zona cóncava, las condiciones deseadas son:

$v(0)=V_o$ (si se arranca desde reposo, $V_o=0$)

$$a(0)=0$$

$$a\left(\frac{T}{2}\right)=a_s$$

$$j(0)=j_M$$

Donde a_s y j_M son los valores máximos que se desean en el diseño.

Resolviendo:

$$c_o = V_o$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{j_M}{2} = \frac{a_s}{T}$$

Esta última relación implica que a_s y j_M no son variables independientes, luego dado el j_M requerido, también queda definida la aceleración máxima necesaria, a_s.

Reemplazando las constantes calculadas en las respectivas ecuaciones, la parte cóncava del perfil S de aceleración queda definida por:

$$s(t) = v_o t + \frac{j_m t^3}{6}$$

$$v(t) = v_o + \frac{j_m t^2}{2}$$

$$a(t) = j_m t$$

Zona convexa.

Redefiniendo el comienzo de este intervalo para que coincida con T/2, las condiciones deseadas son:

$$v(0) = v_h = \frac{(v_s + v_o)}{2}$$

$$a(0) = a_s$$

$$a\left(\frac{T}{2}\right) = 0$$

$$j(0) = -j_M$$

Las ecuaciones que definen el perfil en este segmento son:

$$v(t) = c_o + c_1 t + c_2 t^2$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = c_1 + 2c_2 t$$

De donde:

$$c_o = v_h$$

$$c_1 = a_s$$

$$c_2 = \frac{-j_m}{2} = \frac{-a_s}{T}$$

Y, reemplazando:

$$s(t) = v_h t + \frac{a_s t^2}{2} - \frac{j_m t^3}{6}$$

$$v(t) = v_h + a_s t - \frac{j_m t^2}{2}$$

$$a(t) = a_s - j_m t$$

Límite del procedimiento.

En general, dado un conjunto arbitrario del jerk máximo, j_M, la velocidad inicial, v_o, y la velocidad final, v_s, no siempre es posible definir un perfil S que cumpla con los requisitos.

Esta situación se puede determinar calculando el valor de v_{1M}, la máxima velocidad final alcanzable en el tramo cóncavo con el j_M considerado, y v_{2m}, la velocidad inicial mínima necesaria en el tramo convexo necesaria para alcanzar la velocidad final deseada, v_s.

$$v_{1M} = v_o + \frac{a_{sM}^2}{(2j_M)}$$

$$v_{2m} = v_s - \frac{a_{sM}^2}{(2j_M)}$$

El máximo valor a_{sM} posible dada j_M es:

$$a_{sM} = \sqrt{j_M(v_s - v_o)} = \sqrt{j_M(D_v)}$$

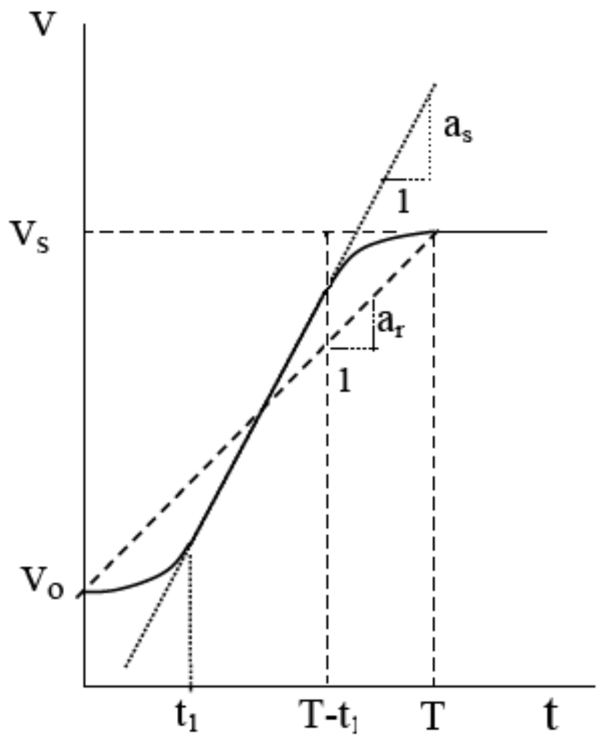
Aparecen tres casos:

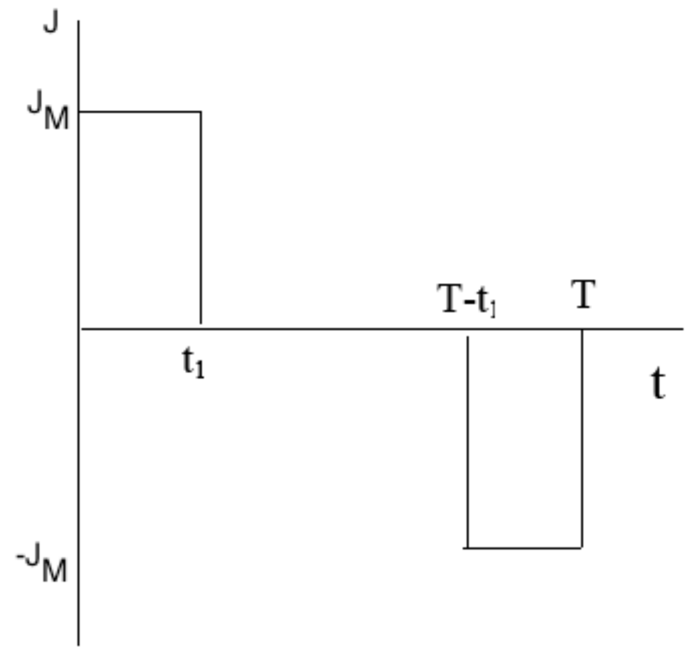
1.- Si $v_{1M} = v_{2m}$, el perfil S queda completamente calculado.

2.- Si $v_{1M} > v_{2m}$, la solución es posible, y puede calcularse con el procedimiento ya definido.

3.- Si $v_{1M} < v_{2m}$, no es posible la solución con un perfil S simple, pero se puede lograr con un perfil S modificado, incluyendo un tramo de aceleración constante a_{sM}, en el cual la velocidad crece linealmente.

Perfil S con tramo de crecimiento lineal de la velocidad (Perfil S modificado).





Perfil de velocidad   Variación del "jerk"

El perfil S modificado tiene tres segmentos:

1.- Tramo inicial cóncavo, de aceleración creciente con $j=j_M$, hasta alcanzar el valor de aceleración máxima, a_M.

2.- Tramo central de crecimiento lineal de la velocidad, bajo aceleración a_M constante, hasta alcanzar el valor de la velocidad v_{2m}.

3.- Tramo final convexo de desaceleración con $j=-j_M$, hasta alcanzas la velocidad v_s.

Se desea que la duración total del perfil S modificado sea la misma que se hubiese calculado en por el método del perfil triangular, con una aceleración constante a_r.

Esto asegura que se sigue completando el desplazamiento en el mínimo tiempo posible, cumpliendo con la limitación de jerk y de aceleración máxima.

Tramo cóncavo.

Las consignas de diseño son:

$$v(0) = v_o$$

$$a(0) = 0$$

$$a(t_1) = a_{sM}$$

$$j(0) = j_M$$

Las ecuaciones de diseño son las consideradas en el tramo correspondiente del perfil S, de donde:

$$c_o = v_o$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{j_M}{2} = \frac{a_{sM}}{2t_1}$$

Como en el perfil S básico:

$$s(t) = v_o t + \frac{j_M t^3}{6}$$

$$v(t) = v_o + \frac{j_M t^2}{2}$$

$$a(t) = j_M t$$

El tramo cóncavo termina en $t=t_1$, cuando se cumple que

$$t_1 = \frac{a_{sM}}{j_M}$$

Evaluando las ecuaciones de movimiento en t_1 se tienen las condiciones alcanzadas al final del segmento cóncavo:

$$s(t_1) = s_1 = \left[v_o + \frac{a_{sM}^2}{6 j_M} \right] \frac{a_s}{j_M}$$

$$v(t_1) = v_1 = v_o + \frac{a_{sM}^2}{2 j_M}$$

$$a_1(t) = a_{sM} = j_M t_1$$

Tramo de crecimiento lineal de la velocidad

En este tramo las ecuaciones del movimiento son:

$$s(t) = v_1 t + \frac{a_{sM} t^2}{2}$$

$$v(t) = v_1 + a_M t$$

Dado que el segmento convexo de desaceleración tendrá una duración igual a la del segmento de aceleración (t_1), este segmento tiene una duración t_2 dada por: $t_2 = T - 2t_1$.

La distancia recorrida en este segmento es:

$$s(t_2) = s(T - 2t_1) = s_2 = v_1(T - 2t_1) + a_M \frac{(T - 2t_1)^2}{2}$$

La velocidad final se puede calcular como:

$$v(t_2) = v_2 = v_1 + a_M t_2 = v_1 + a_M (T - 2t_1)$$

o también como:

$$v_2 = v_s - \frac{a_M^2}{2 j_M}$$

Tramo convexo de desaceleración.

Este tramo tiene una duración t1, igual al de aceleración inicial. Las condiciones a considerar son:

$$v = v(0)$$

$$a(0) = a_M$$

$$v(t_1) = v_s$$

$$a(t_1) = 0$$

$$j(0) = -j_M$$

Las ecuaciones de diseño del segmento son las correspondientes al segmento equivalente en el perfil *S* básico. De allí:

$$c_o = v_2$$

$$c_1 = a_M$$

$$c_2 = \frac{-j_M}{2} = \frac{-a_M}{2t_1}$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$s(t) = v_2 t + \frac{a_M t^2}{2} - \frac{j_M t^3}{6}$$

$$v(t) = v_2 + a_M t - \frac{j_M t^2}{2}$$

$$a(t) = a_M - j_M t$$

Y la distancia cubierta en este segmento es:

$$s(t_1) = v_2 t_1 + \frac{a_M t_1{}^2}{2} - \frac{j_M t_1{}^3}{6} = \left[v_2 + \frac{a_M^2}{3j_M}\right]\frac{a_M}{j_M}$$

En general se puede asumir que si se requiere limitar el valor del jerk, la mayor parte de los casos prácticos requerirán un perfil tipo S modificado.

Implicaciones sobre la toma de decisiones y el diseño del control de velocidad.

Dado que la desaceleración de frenado no puede ser infinita, la distancia de frenado no puede ser cero.
Esto implica que la decisión de empezar a frenar debe realizarse antes de que el error de posición sea cero, lo que no puede lograrse con un sistema de control puramente proporcional, si el punto de referencia de frenado es el punto final de la trayectoria.
Si se desea error de posición cero al final de la trayectoria, sin sobrepasar el final, el control debe tener elementos predictivos.

Frenado de emergencia.

La distancia X_f que recorre un cuerpo que viaja a una velocidad $\vec{v}$ cuando frena con una desaceleración constante $\vec{a}_f$ hasta detenerse totalmente es:

$$X_f = \frac{\vec{v}^2}{2\vec{a}_f}$$

Cuando un móvil viaja a la velocidad máxima, $\vec{v}_M$, y se aplica la desaceleración de frenado máxima posible, $\vec{a}_{fM}$, la distancia mínima de frenado, X_{fm}, resulta :

$$X_{fm} = \frac{\vec{v}_M^{\,2}}{2\vec{a}_{fM}}$$

Esta distancia, que se conoce como la "distancia segura de frenado", debe ser mantenida siempre como espacio de seguridad delante del móvil para evitar choques en caso de emergencia.

El sistema de parada de emergencia de un móvil autónomo debe ser diseñado para que active el freno de emergencia en dos situaciones distintas:

1.- Cuando se detecta la presencia de un obstáculo en la vía a una distancia igual a X_{fm}, la “distancia segura de frenado”, esta opción usualmente requiere de un sistema de detección especializado asociado con el móvil.

2.- Cuando el móvil llega a la “distancia segura de frenado” del punto de final de trayectoria sin haber iniciado la acción de frenado. Esta opción puede requerir de un sistema de señal externo al móvil, colocado en el punto de “distancia segura de frenado”, conectado a un sistema auxiliar en el móvil con autoridad para activar el frenado de emergencia.

En un sistema en el que se mueven n cuerpos en fila uno tras otro, el controlador debe mantener la separación entre cada par de cuerpos sucesivos en un valor mayor o igual a la distancia segura de frenado (X_{fm}) del segundo cuerpo de cada par, para asegurar la detención de todos los cuerpos en caso de emergencia sin que se produzcan choques.

La necesidad de aumentar la separación entre los vehículos a medida que aumenta la velocidad de los mismos trae como consecuencia que la velocidad óptima en una vía (la velocidad que maximiza el número de vehículos desplazados por unidad de tiempo) no es la velocidad máxima que un vehículo individual puede mantener.