Movimiento en línea recta.

Principio básico:

Cuando un cuerpo rígido se desplaza en línea recta en la dirección X, todas las partes del cuerpo viajan a la misma velocidad v(t) y experimentan la misma aceleración a(t) en dicha dirección.

Por lo tanto el movimiento del cuerpo puede ser estudiado considerando que toda la masa esta concentrada en un solo punto, el centro de masa del cuerpo.

Posición
(desplazamiento paralelo al eje X)

$$D_x(t) = x_x(0) + \int_0^t \vec{v}_x(t)dt$$

Donde:

$D_x(t)$ es la posición del cuerpo en el instante t.
$x_x(0)$ es la posición inicial del cuerpo en t=0.
$v_x(t)$ es la velocidad del cuerpo en el instante t.

Las tres variables se miden en dirección paralela al eje X.

En el caso general la velocidad es un vector tridimensional que tiene componentes en los tres ejes espaciales.

La distancia D recorrida también será una trayectoria tridimensional, por lo que $D_{x,y,z}(t)$ debe ser evaluada vectorialmente; en muchos mecanismos donde el desplazamiento en cada eje es el resultado de una acción independiente, esto puede hacerse considerando los desplazamientos parciales proyectados sobre cada uno de los tres ejes y luego calculando el desplazamiento tridimensional resultante.

$$D_x(t) = x_x(0) + \int_0^t \vec{v}_x(t)dt$$

$$D_y(t) = y_y(0) + \int_0^t \vec{v}_y(t)dt$$

$$D_z(t) = x_z(0) + \int_0^t \vec{v}_z(t)dt$$

$$D_{x,y,z}(t) = \sqrt{\left(x_x(t)\right)^2 + \left(x_y(t)\right)^2 + \left(x_z(t)\right)^2}$$

VELOCIDAD.

$$\vec{v}_{x,y,z}(t) = \vec{v}_{x,y,z}(0) + \int_0^t \vec{a}_{x,y,z}(t)dt$$

Donde:

$\vec{v}_{x,y,z}(t)$ es el vector tridimensional de la velocidad del cuerpo en el instante t.

$\vec{v}_{x,y,z}(0)$ es el vector tridimensional de la velocidad inicial del cuerpo en t=0.

$\vec{a}_{x,y,z}(t)$ es el vector tridimensional de la aceleración del cuerpo en el instante t.

En el caso general la velocidad es un vector tridimensional que tiene componentes en los tres ejes espaciales, por lo que el problema debe ser evaluado vectorialmente; como ya se indicó, hay casos donde esto puede hacerse considerando los desplazamientos proyectados sobre cada uno de los tres ejes y luego calculando la resultante tridimensional.

Como en el caso anterior, si el desplazamiento se realiza en dirección paralela al eje de referencia, se anulan los otros dos componentes del vector velocidad y el problema se resuelve como si todas las variables fueran escalares.

Aceleración y Fuerza.

Si se define la fuerza neta, $\vec{f}_{n_{x,y,z}}(t)$, aplicada a una masa M(t), como la suma de todas las fuerzas aplicadas:

$$\vec{f}_{n_{x,y,z}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_{i_{x,y,z}}(t)$$

se cumple que:

$$\vec{f}_{n_{x,y,z}}(t) = M(t)\vec{a}_{x,y,z}(t) = \frac{d\left(M(t)\vec{v}_{x,y,z}(t)\right)}{dt}$$

el vector de aceleración y el de fuerza tienen la misma dirección y sentido.

Si M(t) es constante:

$$\vec{f}_{n\,x,y,z}(t) = M\vec{a}_{x,y,z}(t) = M\frac{d\vec{v}_{x,y,z}(t)}{dt} = M\frac{d^2 D_{x,y,z}(t)}{dt}$$

Donde:

M es la masa constante del cuerpo.

$\vec{f}_{n_{x,y,z}}(t)$ es la fuerza neta aplicada sobre la masa M.

La aceleración de la masa M se produce en la dirección y con el sentido del vector $\vec{f}_{n_{x,y,z}}(t)$.

Aunque las situaciones con masa constante son frecuentes, existen casos en donde la masa puede cambiar continuamente (por ejemplo, en una correa transportadora de sólidos a granel), donde no es aplicable la simplificación.

Si la masa cambia solamente en momentos específicos (por ejemplo, la masa del metro cambia cada vez que suben y bajan pasajeros en una estación del metro), el cálculo puede hacerse por tramos, considerando individualmente cada uno de los intervalos en donde la masa permaneció constante en cada valor.

En el caso unidimensional, las fuerzas pueden tener dos sentidos, pero se aplican sobre el mismo eje de acción.

En ese caso es común llamar fuerzas de empuje, $\vec{f}_e$, a las que actúan para producir movimiento en la dirección deseada, y fuerzas de oposición, $\vec{f}_o$, a las que se oponen al movimiento.

$$\vec{f}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_{ei}(t) - \sum_{j=1}^{m} \vec{f}_{oj}(t) = M(t)\vec{a}(t) =$$

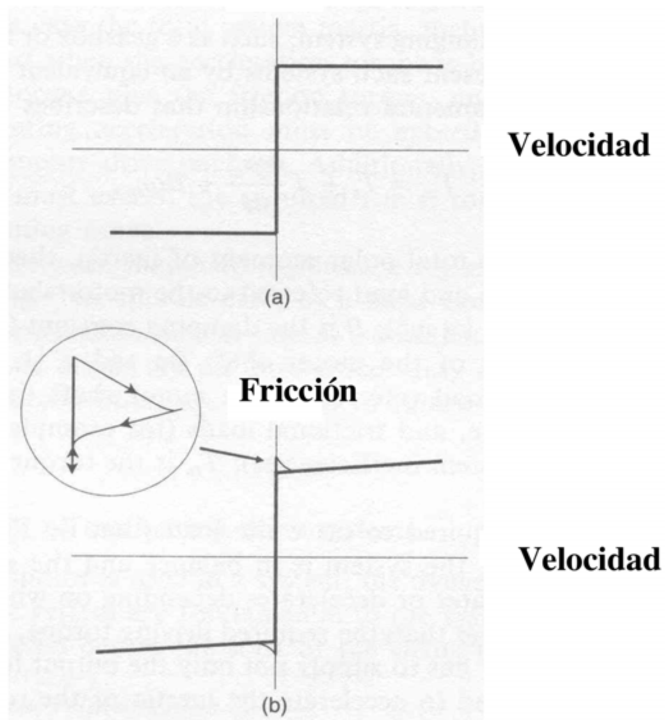
$$= M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = M(t)\frac{d^2 x(t)}{dt}$$

Y, con masa constante:

$$\vec{f}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_{ei}(t) - \sum_{j=1}^{m} \vec{f}_{oj}(t) = M\vec{a}(t) = M\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt}$$

2.-Fricción

En general, cuando un cuerpo se desplaza apoyado en una superficie, se generan fuerzas de oposición al movimiento, cuyo efecto resultante se conoce como fricción.



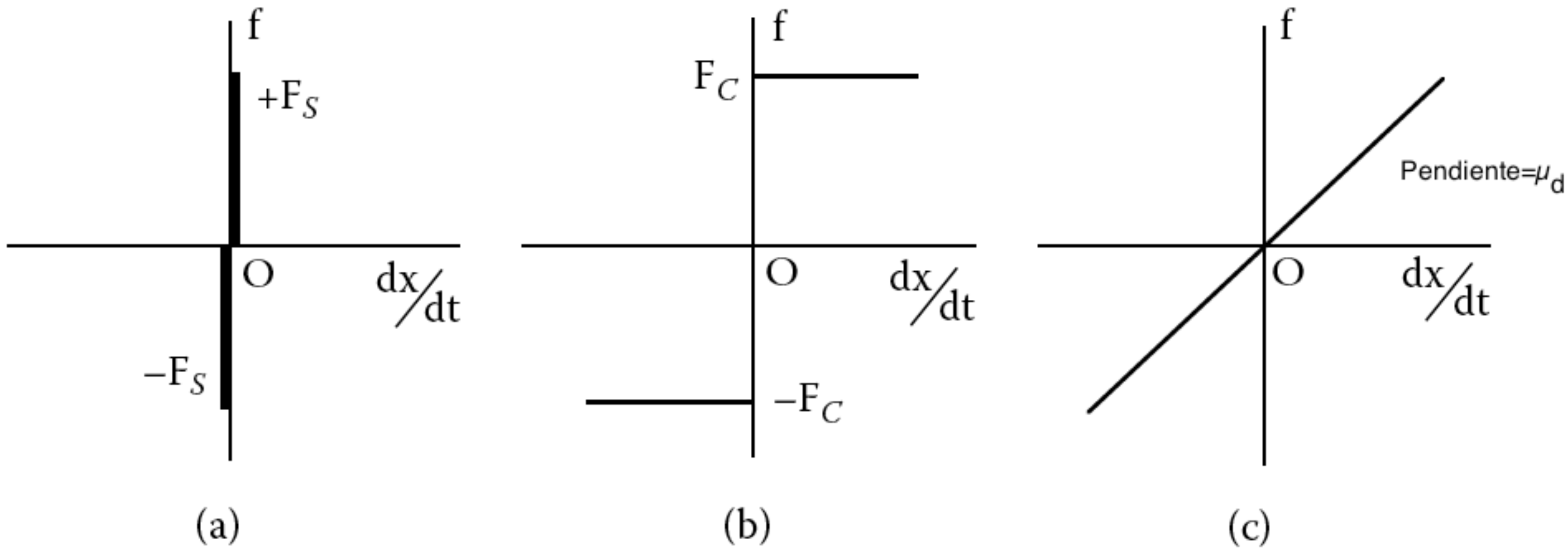
a: Fricción ideal; b: Fricción real

En primera aproximación, la fricción que experimenta un cuerpo en movimiento al rozar con una superficie se puede descomponer en dos:

1.- La "fricción estática", que no depende de la velocidad de desplazamiento.

2.- La "fricción dinámica" que es una función de la velocidad de desplazamiento. Usualmente se asume en primera aproximación que esta fricción es directamente proporcional a la velocidad.

A su vez la fuerza de fricción estática tiene dos componentes, la fricción de arranque, que se opone al comienzo del movimiento, y la fricción de Coulomb que es constante durante todo el movimiento.



Componentes individuales de la fricción:

(a) fricción de arranque.
(b) Fricción de Coulomb
(c) Fricción cinética, proporcional a la velocidad.

La fuerza de fricción "estática" con el cuerpo en movimiento, $\vec{f}_{fe}$, resulta ser:

$$\vec{f}_{fe} = \mu_e \vec{f}_N$$

Donde μ_e es el coeficiente de fricción estática y $\vec{f}_N$ es la fuerza perpendicular a la superficie ejercida por el cuerpo en la zona de contacto.

Tabla de coeficientes de fricción estática entre diversos materiales industriales

Materiales en contacto	μ_e
aluminio/aluminio	1,05 a 1,35
aluminio/acero dulce	0,61
acero dulce/bronce	0,51
acero dulce/acero dulce	0,74
acero duro/bronce	0,24
acero duro/teflón	0,05 a 0,3
acero duro/acero inoxidable	0,53
acero duro/polietileno	0,65
Carburo de tungsteno/acero dulce	0,4 a 0,6

En primera aproximación y para velocidades "bajas", la fuerza de fricción dinámica con el cuerpo en movimiento, $\vec{f}_{fd}$, resulta ser:

$$\vec{f}_{fd} = f(\mu_d, \vec{v})\vec{f}_N = \mu_d \vec{v} \vec{f}_N$$

Donde μ_d es el coeficiente de fricción dinámica, $\vec{v}$ es la velocidad de desplazamiento y $\vec{f}_N$ es la fuerza perpendicular a la superficie ejercida por el cuerpo en la zona de contacto.

Con el cuerpo simplemente apoyado en una superficie horizontal la fuerza normal será igual al peso de la masa:

$$\vec{f}_N = M\vec{g}$$

O, en general, si la masa puede variar con el tiempo:

$$\vec{f}_N = M(t)\vec{g}$$

Y las fuerzas de fricción estática y dinámica son:

$$\vec{f}_{fe} = \mu_e M\vec{g}$$

$$\vec{f}_{fd} = \mu_d M\vec{g}$$

En general la fuerza de fricción siempre se opone al movimiento, luego el caso más simple, con una sola fuerza de empuje y considerando la fricción correspondiente, es:

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) = \vec{f}_e(t) - \mu_e M\vec{g} - \mu_d M\vec{g} =$$

$$= M\vec{a}(t) = M\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt}$$

O, en general, si la masa puede variar con el tiempo:

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) = M(t)\vec{a}(t) = M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = M(t)\frac{d^2x(t)}{dt}$$

La fuerza de empuje necesaria para acelerar la masa M al valor deseado es:

$$\vec{f}_e(t) = M\vec{a}(t) + \mu_e M\vec{g} + \mu_d \vec{v} M\vec{g}$$

O, en general, para masa variable:

$$\vec{f}_e(t) = M(t)\vec{a}(t) + \mu_e M(t)\vec{g} + \mu_d \vec{v} M(t)\vec{g}$$

3.- Desplazamiento de fluido.

Cuando el cuerpo se desplaza en presencia de un fluido (por ejemplo el aire), aparece una fuerza de oposición al movimiento, $\vec{f}_{df}(t)$, como resultado del trabajo que se hace al desplazar el fluido.

En primera aproximación, y para velocidades "no muy altas", se cumple:

$$\vec{f}_{df}(t) = kv^2(t)$$

En estas condiciones:

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) - \vec{f}_{df}(t) =$$
$$= \vec{f}_e(t) - \mu_e M\vec{g} - \mu_d \vec{v} M\vec{g} - kv^2(t)$$

De donde, la fuerza de empuje necesaria para acelerar la masa M al valor deseado es:

$$\vec{f}_e(t) = M\vec{a}(t) + \mu_e M\vec{g} + \mu_d \vec{v} M\vec{g} + kv^2(t)$$

O, si la masa puede variar con el tiempo:

$$\vec{f}_e(t) = M(t)\vec{a}(t) + \mu_e M(t)\vec{g} + \mu_d \vec{v} M(t)\vec{g} + kv^2(t)$$

4.- Efecto del peso del cuerpo.

Cuando (como es normal) el cuerpo se encuentra en un campo gravitatorio la fuerza ejercida por la atracción gravitatoria (el peso del cuerpo) siempre está presente.

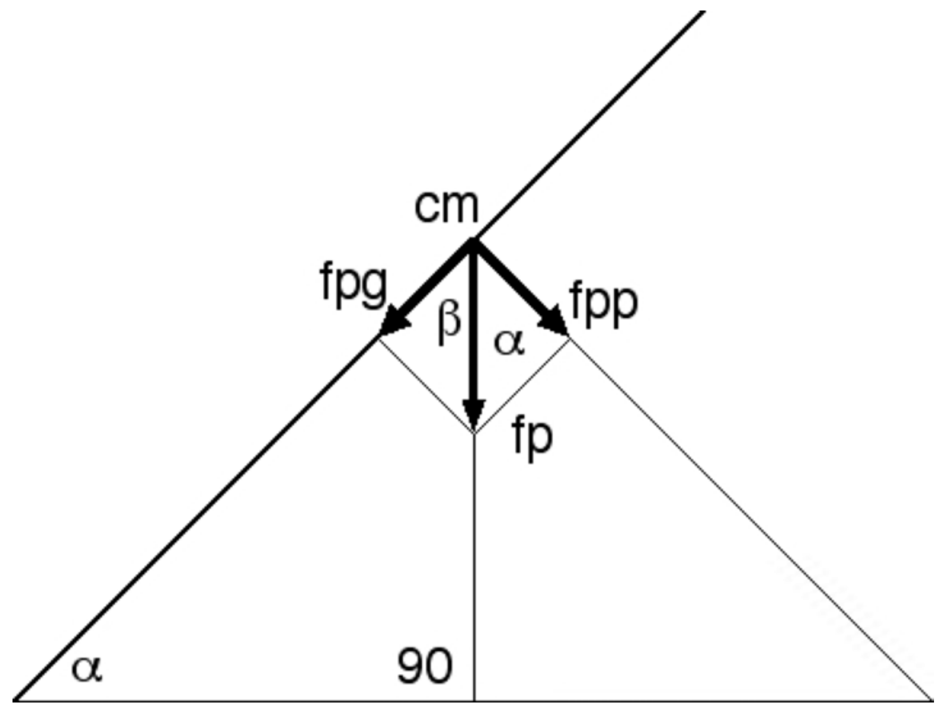
El módulo del vector de peso es:

$$\left|\vec{f}_p\right| = M\vec{g}$$

donde $\vec{g}$ es la aceleración de gravedad.

En sentido estricto g no es constante, ya que depende de la distancia entre la masa que se considere y el centro de masas del sistema; para propósitos prácticos en la Tierra, el centro de masa se puede asumir coincidente con el centro de la Tierra, y dado que los desplazamientos verticales son generalmente muy pequeños en comparación con el radio de la Tierra, g se puede considerar constante. Un caso excepcional sería el "ascensor espacial", si (¿cuando?) fuera posible construirlo.

4.a.- Si el cuerpo está apoyado en un plano horizontal, el peso del cuerpo es una fuerza ortogonal a la dirección del movimiento, que es compensada por una fuerza igual y contraria en el apoyo, y por lo tanto su único efecto en el cálculo de la fuerza neta es indirecto, a través de la fuerza de fricción, que siempre se opone al movimiento.



Descomposición de la fuerza del peso de un cuerpo en un plano inclinado en sus componentes perpendicular y paralelo al plano.

4.b.- Si el cuerpo se desplaza en un plano inclinado en un ángulo α con respecto a la horizontal, el peso del cuerpo debe ser descompuesto en dos vectores, uno perpendicular al plano, $\vec{f}_{pp}$ (que es el componente que interviene en el cálculo de la fricción) y otro paralelo al plano y orientado en dirección contraria al gradiente de altura, $\vec{f}_{pg}$, que debe ser considerado al calcular la fuerza neta ejercida sobre el cuerpo.

Considerando masa constante, los componentes respectivos son:

$$\vec{f}_{pp} = M\vec{g}sen(\beta) = M\vec{g}sen(90 - \alpha) = M\vec{g}\cos(\alpha)$$

$$\vec{f}_{pp} = M\vec{g}\cos(\beta) = M\vec{g}\cos(90 - \alpha) = M\vec{g}sen(\alpha)$$

La componente del peso paralela al gradiente actúa como fuerza de oposición si el movimiento es ascendente, y como fuerza de empuje si el movimiento es descendente.

En un plano inclinado, la fuerza de fricción tiene que ser calculada en función de la proyección del peso perpendicular al plano, esto es el componente $\vec{f}_{pp}$ definido arriba.

Esto es, en un plano inclinado de ángulo α respecto a la vertical:

$$\vec{f}_f = \mu_e M\vec{g}\cos\alpha + \mu_d \vec{v} M\vec{g}\cos\alpha$$

Por lo tanto, incluyendo el aporte del peso y la inclinación de la trayectoria, se tiene:

a- Trayectoria ascendente:

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) - \vec{f}_{df}(t) - \vec{f}_{pg}(t) = M\vec{a}(t)$$

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) - \vec{f}_{df}(t) - M\vec{g}sen(\alpha) = M\vec{a}(t)$$

$$\vec{f}_e(t) = M\vec{a}(t) + \vec{f}_f(t) + \vec{f}_{df}(t) + M\vec{g}sen(\alpha)$$

b- Trayectoria descendente

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) - \vec{f}_{df}(t) + \vec{f}_{pg}(t) = M\vec{a}(t)$$

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) - \vec{f}_{df}(t) + M\vec{g}sen(\alpha) = M\vec{a}(t)$$

$$\vec{f}_e(t) = M\vec{a}(t) + \vec{f}_f(t) + \vec{f}_{df}(t) - M\vec{g}sen(\alpha)$$

5.- En el caso genérico la fuerza de empuje, además de desplazar a la masa M, realiza un trabajo adicional venciendo a una fuerza de oposición adicional, $\vec{f}_e(t)$:

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) - \vec{f}_{df}(t) - (+/-)M\vec{g}sen(\alpha) - \vec{f}_L = M\vec{a}(t)$$

En igualdad de condiciones (misma fuerza neta aplicada), la aceleración producida será inversamente proporcional a la masa a acelerar:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{f}_n(t)}{M}$$

La fuerza de empuje necesaria para realizar la acción requerida, $\vec{f}_e(t)$, resulta:

$$\vec{f}_e(t) = M\vec{a}(t) + \vec{f}_f(t) + \vec{f}_{df}(t) + (+/-)M\vec{g}sen(\alpha) + \vec{f}_L$$

Cuando la fuerza de oposición se hace igual a la de empuje:

$$\vec{f}_n(t) = \vec{f}_e(t) - \vec{f}_f(t) - \vec{f}_{df}(t) - (+/-)M\vec{g}sen(\alpha) - \vec{f}_L = 0$$

$$\vec{f}_n(t) = M\vec{a}(t) = 0 \Rightarrow \vec{a}(t) = 0$$

Y el sistema permanece moviéndose a velocidad constante en la dirección original de desplazamiento. Esta velocidad es la velocidad límite del sistema.

POTENCIA
(MOVIMIENTO PARALELO A UN EJE DE REFERENCIA)

$$P_M(t) = \frac{d\left(f_M(t)x(t)\right)}{dt}$$

Si $f_M(t)$ es constante:

$$P_M(t) = \vec{f}_M \frac{dx(t)}{dt} = \vec{f}_M v(t) = M(t)\vec{a}(t)\vec{v}(t) = M(t)\vec{v}(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Donde:

$P_M(t)$ es la Potencia neta invertida por el mecanismo que ejerce la fuerza $\vec{f}_M$ para mover la masa M en la dirección X con la velocidad $\vec{v}(t)$ en el instante t.

Si la masa es constante:

$$P_M(t) = \vec{f}_M \frac{dx(t)}{dt} = \vec{f}_M v(t) = M\vec{a}(t)\vec{v}(t) = M\vec{v}(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

La potencia es una magnitud escalar; si el desplazamiento tiene componentes en los tres ejes, la potencia total se puede calcular como la suma de las potencias calculadas con la proyección del producto vectorial (fuerza X velocidad) en los tres ejes.

ENERGÍA CINÉTICA DE UNA MASA EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO

$E_{cM}(t)$ ó $E_C(t)$ ó simplemente E, es la energía cinética almacenada en el movimiento de la masa M con la velocidad $\vec{v}(t)$ en el instante t.

$$E_{cM}(t) = E_M(t) = E = \int_0^t P_M(t)dt$$

Si la masa es constante:

$$E_M(t) = \int_0^t P_M(t)dt = M\int_0^v \vec{v}dv = \frac{1}{2}M\vec{v}^2$$

Para efectos prácticos la velocidad que se considera en esta ecuación es la velocidad del cuerpo relativa al origen de coordenadas que se está considerando, lo que permite ignorar todos los movimientos que afectan simultáneamente al cuerpo y al origen de referencia (por ejemplo, la rotación de la tierra sobre su eje, el desplazamiento de la misma en su órbita o la posibilidad de que el cuerpo cuyo movimiento relativo se analiza y el origen de las coordenadas sean parte de una máquina que está montada en un vehículo en movimiento).

Todo cambio de velocidad está acompañado por un cambio ΔE_c en la energía cinética del cuerpo, dado por:

$$\Delta E = \frac{M\left(v_f^2 - v_i^2\right)}{2}$$

Donde v_i es la velocidad inicial antes del cambio y v_f es la velocidad final después del cambio.

Si $v_f > v_i$ la variación en la energía cinética es positiva, y la energía adicional debe ser proporcionada por una fuente externa (un motor); si $v_f < v_i$ la variación en la energía cinética es negativa, y la energía en exceso tiene que ser absorbida por un receptor externo (un freno).

ENERGÍA POTENCIAL DE UNA MASA.

$E_{pM}(t)$, ó $E_p(t)$ ó, simplemente, E_p, es la energía potencial almacenada en la masa M por estar colocada a una distancia z(t) del centro de atracción gravitatoria que genera la aceleración de gravedad $\vec{g}$.

$$E_{pM}(t) = E_p(t) = E_p = M\vec{g}z(t)$$

Usualmente el movimiento de la masa M en el eje Z está restringido (por ejemplo, por la presencia del suelo) y no se emplea el valor absoluto de z(t) desde el origen del campo gravitatorio (el centro de masa de la Tierra), sino el valor de desplazamiento h(t), la “altura” respecto a un punto de referencia arbitrario, que se considera la “altura cero”.

Por lo tanto usualmente no se trabaja con el valor absoluto de la energía potencial del cuerpo, sino con cambios relativos a la energía potencial de la masa colocada a la altura de referencia (altura cero).

$$E_{pMr}(t) = E_{pr}(t) = E_p = M\vec{g}h(t)$$

Todo cambio de altura está acompañado por un cambio ΔE_p en la energía potencial del cuerpo, dado por:

$$\Delta E = \frac{M\left(h_f - h_i\right)}{2}$$

Donde h_i es la altura inicial antes del cambio y h_f es la altura final después del cambio.

Si $h_f > h_i$ la variación en la energía potencial es positiva, y la energía adicional debe ser proporcionada por una fuente externa (un motor); si $h_f < h_i$ la variación en la energía potencial es negativa, y la energía en exceso tiene que ser absorbida por un receptor externo (un freno).

Energía mecánica total.

Dado que en general un cuerpo se puede desplazar con un vector de velocidad tridimensional $\vec{v}_{x,y,z}(t)$ en el espacio tridimensional, la energía mecánica del cuerpo en cada instante es:

$$E_{Mcp}(t) = E_{cM}(t) + E_{pM}(t)$$

La energía potencial solo puede ser ignorada si existe la seguridad de que la trayectoria en todo momento está a una altura constante con respecto al plano de referencia de la "altura cero".

Consideraciones energéticas sobre el frenado.

Un sistema con una masa M, que se desplaza a una velocidad v, tiene una energía cinética almacenada, E_c, dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2$$

Para que el sistema se detenga es preciso que esa energía sea totalmente disipada.

Para lograr esto, el primer paso es anular el par motriz, de forma que, si el móvil está en un plano horizontal, el sistema quede moviéndose exclusivamente por acción de la energía cinética almacenada en la inercia de la masa:

$$M\frac{dv(t)}{t} = -\left(f_f(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)$$

lo que produce una desaceleración propia del sistema dada por:

$$a_f(t) = \frac{-\left(f_f(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)}{M}$$

Si el frenado se produce mientras el móvil desciende por una pendiente, hay que tomar en cuenta además el empuje proporcionado por el componente del peso proyectado según la dirección del gradiente:

$$M\frac{dv(t)}{t} = M\vec{g}sen\alpha - \left(f_f(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)$$

lo que reduce la desaceleración propia del sistema:

$$a_f(t) = \frac{M\vec{g}sen\alpha - \left(f_f(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)}{M}$$

En la pendiente el proceso de frenado, además de la energía cinética inicial almacenada, debe disipar también la energía potencial liberada al bajar. Si la reducción de altura tiene un valor Δz, la energía potencial a disipar será:

$$E_p = M\vec{g}\Delta z$$

y la energía mecánica total, E_m, que se debe disipar al frenar será:

$$E_m = \frac{1}{2}M(\Delta v)^2 + M\vec{g}\Delta z$$

En ambos casos la aceleración de frenado es variable, el proceso de frenado no es controlado y, además, usualmente el tiempo y la distancia de frenado son inaceptables por ser demasiado largos; siendo posible que en la pendiente no se produzca el frenado total.

En la práctica existen dos formas de reducir el tiempo de frenado, esto es, de acelerar la disipación de la energía mecánica almacenada:

1.- Frenado por fricción (frenado disipativo).

2.- Frenado por recuperación de energía (frenado regenerativo).

1.- Frenado por fricción (frenado disipativo).

Se incluye en el sistema un elemento adicional, el freno de fricción, que al accionarse introduce un componente de alta fricción, μ_{freno}, ($\mu_{freno} >> \mu_{cuerpo}$)

$$a_f(t) = \frac{-\left(f_f(t) + f_{freno}(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)}{M}$$

o, en la pendiente:

$$a_f(t) = \frac{M\vec{g}sen\alpha - \left(f_f(t) + f_{freno}(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)}{M}$$

En estas condiciones, si la fuerza de fricción del freno, $f_{freno}(t)$, puede ser arbitrariamente grande, la aceleración de frenado también lo será.

El valor de la aceleración de frenado puede ser controlado modulando el valor instantáneo de $f_{freno}(t)$.

Normalmente toda la energía que se debe disipar en el freno de fricción, E_m, se convierte en calor y no puede ser aprovechada.

Adicionalmente, dado que la temperatura del freno de fricción no debe sobrepasar un valor crítico, existe un límite a la cantidad de energía que puede ser disipada antes de que se alcance la condición de calentamiento crítico.

Si el freno se sobrecalienta pierde eficiencia y el proceso de frenado aborta.

Esta condición es particularmente grave en el caso de vehículos pesados que deben bajar pendientes largas y pronunciadas (por ejemplo, la "bajada de Tazón").

2.- Frenado por recuperación de energía.

Se introduce en el sistema un elemento capaz de convertir la energía mecánica en otra forma de energía utilizable, usualmente eléctrica.

En la ecuación dinámica del sistema la acción de este elemento se puede modelar como una fuerza de carga adicional, $F_{freno}(t)$.

La aceleración de frenado en estas condiciones será:

$$a_f(t) = \frac{-\left(f_f(t) + F_{freno}(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)}{M}$$

o, en la pendiente:

$$a_f(t) = \frac{M\vec{g}sen\alpha - \left(f_f(t) + F_{freno}(t) + kv^2(t) + F_L(t)\right)}{M}$$

El valor de la aceleración de frenado puede ser controlado modulando el valor instantáneo de $F_{freno}(t)$

En principio, la energía recuperada puede ser re-usada, por lo que el frenado puede considerarse no disipativo.

En esta opción en principio no existe un límite fijo a la cantidad de energía mecánica que puede ser removida para lograr frenar.

Idealmente, para simplificar el sistema, la máquina que genera la fuerza motriz debe ser también la que se convierta en generador para realizar la acción de frenado.

En general, este es el caso con las máquinas eléctricas.

Movimiento en línea recta.

unidades.

Variable	MKS
Fuerza	Newton (N)
Masa	Kilo (kg)
Tiempo	Segundo (s)
Posición (relativa al origen)	Metro (m)
Velocidad	Metro por segundo (m/s)
Aceleración	Metro por segundo por segundo (m/s^2)
Potencia	Vatio (W)
Energía	Joule (J)