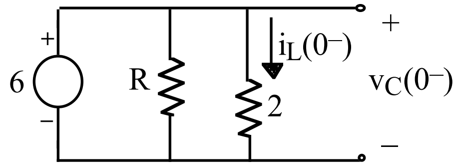
Solución del Quiz 1

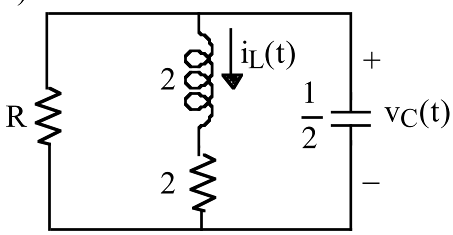
1.- En $t = 0^-$:



$$i_L(0^-) = \frac{6}{2} = 3 \text{ A.}$$

$$v_C(0^-) = 6 \text{ V.}$$

a) En $t > 0$:



Del nodo superior,

$$\frac{v_c}{R} + i_L + \frac{1}{2}v_c' = 0 \quad \Rightarrow \quad i_L = -\frac{v_c}{R} - \frac{1}{2}v_c'$$

De la malla derecha:

$$v_c - 2i_L' - 2i_L = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c + \frac{2}{R}v_c' + v_c'' + \frac{2}{R}v_c + v_c' = 0$$

$$v_c'' + \left(1 + \frac{2}{R}\right)v_c' + \left(1 + \frac{2}{R}\right)v_c = 0$$

Y la ecuación característica correspondiente es

$$s^2 + \left(1 + \frac{2}{R}\right)s + \left(1 + \frac{2}{R}\right) = 0$$

Para lograr la respuesta críticamente amortiguada, el discriminante de la ec. característica debe ser igual a cero, de lo cual se obtiene:

$$\left(1 + \frac{2}{R}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2}{R}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3R^2 + 4R - 4 = 0$$

$$R = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{2}{3}\Omega}$$

b) La ecuación diferencial se reduce a $v_c'' + 4\,v_c' + 4v_c = 0$
y, resolviendo la ec. característica

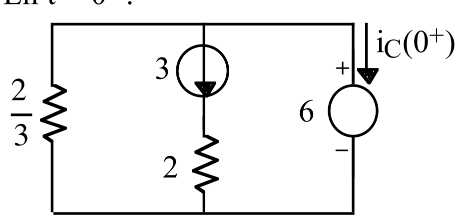
$$s^2 + 4\,s + 4 = 0, \quad (s + 2)^2 = 0, \quad s_{1,2} = -2$$

La respuesta subamortiguada es entonces

$$v_c(t) = (K_1 t + K_0)\,e^{-2t}, \qquad v_c(0^+) = K_0 = v_c(0^-) = 6 \text{ V.}$$

$$v_c'(t) = K_1\,e^{-2t} - 2(K_1 t + K_0)\,e^{-2t}, \qquad v_c'(0^+) = K_1 - 2K_0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = v_c'(0^+) + 12$$

En $t = 0^+$:

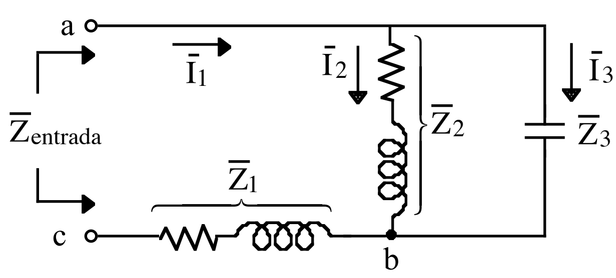


$$\frac{6}{2/3} + 3 + \frac{1}{2}v_c'(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c'(0^+) = -24 \text{ V./s}$$

$$K_1 = -12 \text{ V./s}$$

$$\boxed{v_c(t) = (-12t + 6)\,e^{-2t} \text{ V.,} \quad t > 0}$$

2.-



$I_1 = I_2 = I_3 = 2$ A.

$V_{ab} = V_{bc} = 100$ V.

$V_{ac} = 100\sqrt{2}$ V.

Según Kirchhoff:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \qquad (1)$$

$$\bar{V}_{ac} = \bar{V}_{ab} + \bar{V}_{bc} \qquad (2)$$

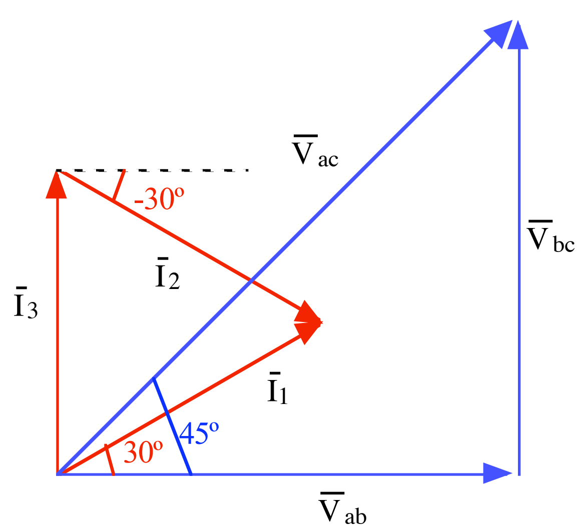
Como los módulos de las corrientes son iguales, el diagrama de la suma (1) debe formar un triángulo equilátero con ángulos internos de 60º.

De forma semejante, con $V_{ab} = V_{bc}$ y $V_{ac} = \sqrt{2}\, V_{ab}$, la suma (2) es un triángulo rectángulo isósceles, con 2 ángulos internos iguales a 45º.

$\bar{Z}_1$ y $\bar{Z}_2$ son inductivas, por lo cual $\bar{V}_{bc}$ debe adelantar a $\bar{I}_1$ y $\bar{V}_{ab}$ estará adelantado con respecto a $\bar{I}_2$.

$\bar{Z}_3$ es un condensador, y la corriente $\bar{I}_3$ debe estar adelantada 90º con respecto a la tensión $\bar{V}_{ab}$.

Con esta información podemos bosquejar el diagrama fasorial. Tomando a $\bar{V}_{ab}$ como referencia de fase:



Construcción: dibujamos $\bar{V}_{ab}$ horizontal e $\bar{I}_3$ adelantada 90º. Sobre ésta se dibuja un triángulo equilátero que cumpla la suma (1). $\bar{V}_{bc}$ forma un ángulo recto con $\bar{V}_{ab}$, en dirección positiva para que quede adelantado con respecto a $\bar{I}_1$, y completamos el triángulo rectángulo con la hipotenusa $\bar{V}_{ac}$ representando la suma (2).

Del diagrama fasorial:

$$\bar{I}_1 = 2\ \underline{/30^o}\ \text{A.} \qquad \bar{V}_{ab} = 100\ \underline{/0^o}\ \text{V.}$$

$$\bar{I}_2 = 2\ \underline{/-30^o}\ \text{A.} \qquad \bar{V}_{bc} = 100\ \underline{/90^o}\ \text{V.}$$

$$\bar{I}_3 = 2\ \underline{/90^o}\ \text{A.} \qquad \bar{V}_{ac} = 100\sqrt{2}\ \underline{/45^o}\ \text{V.}$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{V}_{bc}}{\bar{I}_1} = \frac{100\ \underline{/90^o}}{2\ \underline{/30^o}} = 50\ \underline{/60^o}\ \Omega = 25 + j25\sqrt{3}\ \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{I}_2} = \frac{100\ \underline{/0^o}}{2\ \underline{/-30^o}} = 50\ \underline{/30^o}\ \Omega = 25\sqrt{3} + j25\ \Omega$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{I}_3} = \frac{100\ \underline{/0^o}}{2\ \underline{/90^o}} = 50\ \underline{/-90^o}\ \Omega = -j50\ \Omega$$

$$\bar{Z}_{ent.} = \frac{\bar{V}_{ac}}{\bar{I}_1} = \frac{100\sqrt{2}\ \underline{/45^o}}{2\ \underline{/30^o}} = 50\sqrt{2}\ \underline{/15^o}\ \Omega = 68,3 + j18,3\ \Omega$$

Si se toma $\bar{V}_{ac}$ como referencia de fase, se obtiene un diagrama fasorial rotado –45º respecto al anterior. Se puede comprobar que los valores de las impedancias no cambian: